

Astronomická olympiáda 2024

Kolo: celoslovenské kolo

Dátum súťaže: 02. 05. 2024

Kategória: **stredná škola**

Čas na vypracovanie: **4 hodiny**

- Každý príklad riešte *jednostranne na samostatný list*.
V hlavičke zakrúžkujte vašu kategóriu a typ príkladu, a vyplňte meno, priezvisko, názov príkladu, poradové číslo strany a celkový počet strán.
- Povolené pomôcky: písacie a rysovacie potreby, *neprogramovateľné* kalkulačky a občerstvenie.
- Pri výpočtoch použite hodnoty konštánt, jednotiek a veličín uvedených v priloženom *konštantovníku*.
Upozorňujeme, že nie všetky konštanty sú potrebné.
- Výsledok zaokrúhlite na relevantný *počet platných číslic*.



Slovenská ústredná hviezdáreň
v Hurbanove

**Slovenská
Astronomická
Spoločnosť**
pri Slovenskej akadémii vied

Teoretické úlohy Σ 600b

T1 Precesia

(60 b, autor: Radovan Lascsák)

Zem obieha okolo Slnka v rovine, ktorú voláme rovina ekliptiky. Rotačná os Zeme je voči kolmému smeru na rovinu ekliptiky vychýlená o $\varepsilon = 23,5^\circ$. Inými slovami, ekliptikálny a nebeský pól sú na nebeskej sfére vzdialené o uhol ε . Severná pologuľa Zeme je najviac priklonená ku Slnku počas letného slnovratu, a najviac odklonená počas zimného slnovratu.

Zemská rotačná os aktuálne mieri do súhvezdia Malý Medveď, blízko hviezdy Polárka. Avšak, precesný pohyb rotačnej osi spôsobuje, že krúži okolo kolmého smeru na rovinu ekliptiky, pričom si približne zachováva vychýlenie o ε . Períodu precesie Zeme voláme Platónsky rok, ktorý trvá 25 800 rokov. Rovnaký pohyb ako Zem vykonáva rýchlo roztočený vlčík (peonza), ktorého rotačná os je mierne sklonená a pomaly sa nakláňa do rôznych smerov.

Úlohy:

- Aká bola rektascenzia ekliptikálneho pólu α'_E pred 12 900 rokmi? Jarný bod je vždy definovaný ako priesečník nebeského rovníka a ekliptiky, v ktorom sa Slnko nachádza počas jarnej rovnodennosti. Všimnite si, že 12 900 rokov je polovica Platónskeho roka.
- Hviezda Betelgeuze má dnes súradnice $\alpha = 6^h$, $\delta = 7^\circ$. Aké boli jej súradnice α' , δ' pred 12 900 rokmi? Zanedbajte vlastný pohyb hviezdy a nutáciu.
- Bola Betelgeuze pred 12 900 rokmi pozorovateľná zo Slovenska ako cirkumpolárna, zapadajúca, alebo nevychádzajúca hviezda? Uvažujte zemepisnú šírku $\varphi = 49^\circ$.

T2 Starshot

(60 b, autor: Samuel Amrich)

Jeden z konceptov ako preskúmať iné hviezdne systémy je projekt **Breakthrough Starshot**, ktorý využíva veľmi malé sondy so solárnymi plachtami, urýchľované pomocou laseru. Typicky sa so sondami vo vesmíre komunikujeme pomocou rádiového žiarenia, i keď v prípade Starshotu to bude pravdepodobne pomocou optického laseru.

V reálnom svete je množstvo prenesenej informácie pomocou elektromagnetického žiarenia závislé od použitej frekvencie. K výpočtu sa používa Nyquistov teorém, podľa ktorého maximálne množstvo prenesenej informácie za sekundu je rovné polovici použitej frekvencie (ak $f = 100$ MHz, potom maximálny tok informácií je $\mu = 50$ Mbit/s).

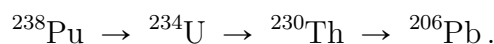
Predstavte si, že Starshot urýchlená na rýchlosť $v = 0,2c$ vysiela na frekvencii $f = 2,3$ GHz. Vypočítajte akú maximálnu prenosovú rýchlosť dokáže sonda vysielať a akú maximálnu prenosovú rýchlosť dokážeme zachytiť na Zemi?

Dôležité je ešte poznamenať, že keď používame predpony kilo- (k-), mega- (M-) a giga- (G-) v spojení s digitálnymi jednotkami, myslíme celočíselné násobky tisícky, nie 1024. Pre násobky 1024 sa používajú predpony kibi- (Ki-), mebi- (Mi-) a gibi- (Gi-).

T3 Datovanie Voyageru

(60 b, autor: Samuel Amrich)

Predstavte si situáciu, že mimozemská rasa odchytila v medzihviezdnom priestore sondu Voyager. Táto mimozemská civilizácia sa rozhodne preskúmať sondu a zistiť jej vek. To je možné aj vďaka tomu, že boli schopní odhaliť, že jej zdroj energie je RTG (rádioizotopový termoelektrický generátor). To nie je nič iné ako valec silne rádioaktívneho materiálu, ktorého atómy sa prirodzene rozpadajú a uvoľnená tepelná energia sa premieňa na elektrickú. Pričom z prekladu nápisov na RTG odhalili, že na začiatku obsahoval 100% ^{238}Pu (ale hmotnosť tam neudali). Rozpadová rada je zložitá, ale v podstate sa dá zjednodušiť na



Prvý rozpad je v podstate okamžitý, teda polčas rozpadu je $T(^{238}\text{Pu} \rightarrow ^{234}\text{U}) \approx 0$ rokov. Druhý rozpad je významný so svojím polčasom rozpadu $T(^{234}\text{U} \rightarrow ^{230}\text{Th}) = 244\,900$ rokov. A tretí sa opäť udeje okamžite, teda $T(^{230}\text{Th} \rightarrow ^{206}\text{Pb}) \approx 0$ rokov. Aktuálne v RTG Voyagera našli

$$m(^{206}\text{Pb}) = 0,32 \text{ kg} \quad , \quad m(^{234}\text{U}) = 1,11 \text{ kg}.$$

Vypočítajte ako dlho sa Voyager nachádzal vo vesmíre a koľko plutónia ^{238}Pu mal na začiatku.

Z hľadiska skúmania hmotností izotopov nezabúdajte, že sa pri rozpade uvoľňujú α častice (respektívne jadrá hélia ^4He), ktoré ale unikli z kontajnera udržiavajúceho rádioizotopy. Iné častice pri rozpade zanedbajte. Predpokladajte, že hmotnosť protónu je rovná hmotnosti neutrónu a hmotnosť elektrónu je prakticky nulová. Predpokladajte, že hmotnosť izotopu je určená čisto počtom nukleónov v jadre. Vplyv kozmického žiarenia zanedbajte.

T4 Betelgeuze

(80 b, autor: Ondrej Juhás)

Betelgeuze (α Ori) je červený nadobor a druhá najjasnejšia hviezda súhvezdia Orión. Pôvodne veľmi horúca hviezda hlavnej postupnosti sa aktuálne nachádza v poslednom štádiu svojho života, a predpokladá sa, že počas najbližších 100 000 rokov vybuchne ako supernova. Betelgeuze je pulzujúca polopravidelná premenná hviezda, a jej zdanlivá magnitúda typicky kolíše medzi hodnotami $m_{\max} = 0,28$ mag a $m_{\min} = 1,11$ mag. Bolometrická korekcia pre hviezdu Betelgeuze je $BC = -1,30$ mag.

Pri výpočtoch budete potrebovať nasledujúce údaje o hviezde Betelgeuze

$$\text{Vzdialenosť od Zeme: } d_{\text{Bet}} = 494 \text{ ly} ,$$

$$\text{Polomer: } R_{\text{Bet}} = 764 R_{\odot} .$$

Úlohy

- Vypočítajte, aký je žiarivý tok na povrchu Zeme v momente, keď je hviezda najjasnejšia a keď je najmenej jasná.
- Vypočítajte absolútnu magnitúdu Betelgeuze vo viditeľnom spektre v momente, keď je v minime.

Na prelome rokov 2019 a 2020 došlo k udalosti nazvanej „Great dimming“, kedy sa zdanlivá magnitúda Betelgeuze drasticky znížila až na $m_{\text{dim}} = 1,59$ mag. Populárna bola hypotéza, že povrchová teplota hviezdy prudko klesla, a jej zánik môže prísť oveľa skôr ako sa predpokladalo.

- Zistite, o koľko kelvinov by sa musela zmeniť povrchová teplota aby magnitúda poklesla z m_{\min} na m_{dim} . Uvažujte zjednodušený model, kde sa pri meniacej teplote nemení bolometrická korekcia pre hviezdu.

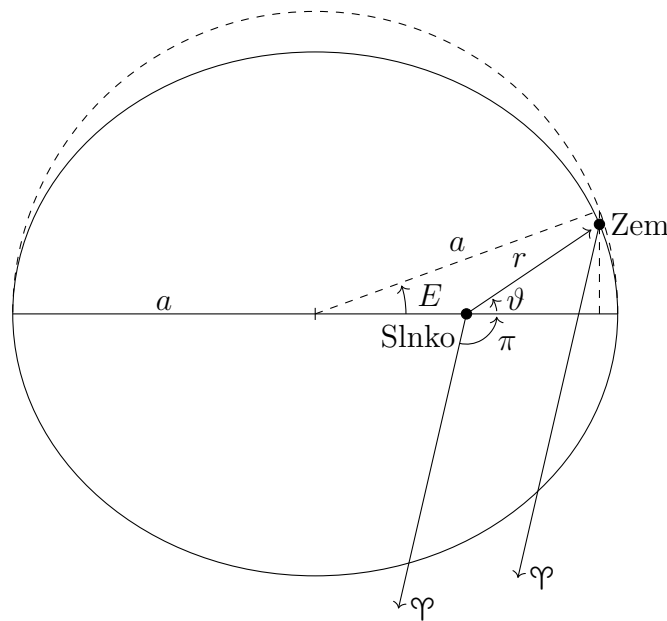
Toto „stmavnutie“ bolo však zrejme spôsobené vyvrhnutím materiálu samotnou hviezdou Betelgeuze (tzv. Surface Mass Ejection), ktorý pohlcoval časť žiarenia hviezdy, čo bolo skutočnou príčinou výrazného poklesu zdanlivej magnitúdy.

T5 Liptovská Mara III

(150 b, autor: Samuel Buranský)

Počas roka dochádza na Zemi k striedaniu ročných období. Dôvodom je naklonenie roviny zemského rovníka o uhol $\varepsilon = 23,4^\circ$ voči rovine ekliptiky. Zem zároveň obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe, to znamená, že raz je k Slnku bližšie inokedy ďalej. To spôsobuje, že na dané miesto na Zemi dopadá v rôzne dni rôzne množstvo žiarivej energie zo Slnka. Vypočítajte pomer žiarivých energií zo Slnka, ktoré dopadnú na celú plochu Liptovskej Mary za 1 s na pravé poludnie celoštátneho kola AO (2. 5. 2024) a na poludnie pri zverejnení úloh domáceho kola AO (15. 1. 2024). Poloha Liptovskej Mary je $49,1^\circ \text{ N}$, $19,5^\circ \text{ E}$ a plocha $A = 27 \text{ km}^2$.

Zem obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe s excentricitou $e = 0,0167$. Prechod perihéliom tento rok nastáva 3. 1. 2024 a prechod aféliom 5. 7. 2024. Pre prípadné medzivýpočty môžete využiť slnečnú konštantu, ktorej hodnota je uvedená v zozname konštánt. Slnečná konštanta predstavuje množstvo energie, ktoré prejde za 1 s plochou 1 m^2 orientovanou kolmo na slnečné lúče vo vzdialenosti 1 au od Slnka bez extinkcie (absorpcie). Pri výpočte zanedbajte vplyv atmosféry. Počas jedného dňa považujte deklináciu Slnka za konštantnú.



Obr. T5.1: Schéma elementov dráhy Zeme.

Budete potrebovať rovnicu elipsy v polárnych súradniciach, teda vzťah medzi vzdialenosťou od ohniska r a pravou anomáliou ϑ

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad \text{kde } p = a(1 - e^2). \quad (\text{T5.1})$$

Dĺžka perihélia je $\pi = 103^\circ$. Význam ϑ a π je zrejмый z obrázka T5.1. Takisto sa vám budú hodiť vzťahy z regionálneho kola AO

$$r = a(1 - e \cos E) \quad , \quad M = E - e \sin E \quad , \quad M = n(t - T) \quad , \quad n = \frac{2\pi}{P}. \quad (\text{T5.2})$$

T6 Planéta červeného trpaslíka (190 b, autor: Martin Okánik)

V súčasnosti je známych vyše 5600 potvrdených exoplanét. Predmetom špeciálneho záujmu sú tie, ktoré môžu mať povrchové teploty umožňujúce existenciu vody v kvapalnom skupenstve.

Uvažujme hviezdu hlavnej postupnosti spektrálnej triedy M, tzv. červeného trpaslíka. Pre potreby tohto príkladu predpokladajme, že hviezda vyžaruje ako absolútne čierne teleso (AČT) s teplotou 3000 K, a Slnko vyžaruje ako AČT s teplotou 6000 K. Polomer hviezdy je 0,2 polomeru Slnka.

Na kruhovú obežnú dráhu tejto hviezdy umiestnime hypotetickú planétu Corusant do takej vzdialenosti, aby bol celkový žiarivý tok dopadajúci kolmo na meter štvorcový v danej vzdialenosti od hviezdy rovnaký ako pre Zem od Slnka (slnečná konštanta). Polomer a hmotnosť Corusantu sú tiež rovnaké ako Zeme, a je stále prípustné uvažovať že Corusant je podstatne menej hmotný ako jeho centrálna hviezda.

Táto úloha má tri podúlohy s dôrazom na žiarivé toky, nebeskú mechaniku a podmienky na planéte.

Žiarivé toky (50b)

(a) V akej vzdialenosti od červeného trpaslíka musí byť podľa týchto kritérií Corusant?

Rozdelme elektromagnetické žiarenie na tri oblasti: krátkovlnné (KV) s vlnovou dĺžkou $\lambda < 400$ nm, viditeľné (V) $400 \text{ nm} < \lambda < 750$ nm, dlhovlnné (DV) $\lambda > 750$ nm.

(b) Doplňte do troch viet za odrážkami nižšie namiesto trojbodiek slová „väčšia“, „menšia“, „rovnaká“. Jedno slovo môžete použiť nula, jeden alebo viac krát. Zanedbajte efekty atmosfér Zeme alebo Corusantu. V tejto úlohe nie je nutné nič počítať.

- Zdanlivá magnitúda červeného trpaslíka v KV oblasti z Corusantu je ...
... ako Slnka zo Zeme.
- Zdanlivá magnitúda červeného trpaslíka v DV oblasti z Corusantu je ...
... ako Slnka zo Zeme.
- Zdanlivá bolometrická magnitúda červeného trpaslíka z Corusantu je ...
... ako Slnka zo Zeme.

Poznámka: Magnitúdy tu porovnávame ako reálne čísla, teda veta „ m_1 je väčšia než m_2 “ znamená jednoducho $m_1 > m_2$.

Nebeská mechanika (50b)

Pre hviezdy nízkej hmotnosti platí približný vzťah medzi ich svietivosťou L (teda celkovým žiarivým výkonom hviezdy vo wattoch) a hmotnosťou M , v porovnaní so Slnkom (L_{\odot}, M_{\odot}).

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 0,23 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2,3}. \quad (\text{T6.1})$$

- (c) Na základe tohto vzťahu odhadnite aká bude gravitačná sila pôsobiaca na Corusant, v pomere ku gravitačnej sile Slnka pôsobiaceho na Zem. Odhadnite tiež pomer slapových síl z materskej hviezdy na Zemi a Corusante.

Pomôcka: slapová sila je daná ako rozdiel gravitačnej sily hviezdy pôsobiacej na privrátenú a odvrátenú stranu planéty. Polomer Corusantu R môžete považovať za rovný polomeru Zeme a podstatne menší než vzdialenosť k materskej hviezde a , takže $(a \pm R)^n \approx a^n (1 \pm \frac{nR}{a})$.

Podmienky na planéte (90b)

V predchádzajúcej úlohe ste mali možnosť zistiť, že gravitačná a slapová sila hviezdy pôsobiace na Corusant sú podstatne vyššie ako na Zemi, čo je cena za to, že na Corusant dopadá rovnaké množstvo žiarivej energie z podstatne menej jasnej hviezdy. Toto však nezostalo bez následkov, a v priebehu miliónov rokov sa rotácia Corusantu dostala do slapovej rezonancie 1:1 s jeho dobou obehu okolo hviezdy. To znamená, že Corusant vzhľadom na vzdialené hviezdy rotuje s periódou rovnou jeho orbitálnej perióde a vyzerá tak, akoby sa vzhľadom na svoju materskú hviezdu vôbec neotáčal.

Sklon orbitálnej a rovníkovej roviny je rovný nule. Na rovníku na privrátenej strane sa nachádza tzv. substelárny bod (SB), kde je materská hviezda vždy v zenite, a na rovníku na odvrátenej strane sa nachádza tzv. antistelárny bod (AB), kde je hviezda vždy v nadire, teda priamo pod nohami. Tieto body vám môžu v časti (f) pomôcť pri formulovaní vhodného systému súradníc.

- (d) Ako rýchlo sa otáča Corusant okolo osi? Rotačnú periódu uveďte v pozemských dňoch.
- (e) Keby mal celý povrch Corusantu homogénnu teplotu, aká by bola? Môžte uvažovať, že Corusant pohlcuje žiarenie zo svojej hviezdy ako absolútne čierne teleso. Prečo je homogénna povrchová teplota v tomto prípade veľmi nerealistický predpoklad?
- (f) V prípade, že by bol každý bod povrchu Corusantu v žiarivej rovnováhe s naň dopadajúcim žiarením z hviezdy, a nevymieňal si energiu s inými bodmi na Corusante, aké by bolo rozloženie teploty na povrchu? Uvažujte nad symetriou tohto problému - a na základe tejto symetrie navrhnete vhodný systém súradníc, v ktorom úlohu vyriešite. Vhodnou voľbou súradníc bude totiž teplota na celom povrchu planéty funkciou len jednej premennej.

Bonus: Podľa vás ktoré procesy (okrem skleníkového efektu) vedú k tomu, že realistický povrch Corusantu bude niečo medzi extrémnymi prípadmi (e) a (f) ?