

ASTROKURZ

(poznámky – alpha verzia!)

3. októbra 2024

Radovan Lascsák

Terézia Hanáková

Samuel Amrich

Študijný materiál určený k príprave
na astronomickú olympiádu pre stredné školy
vychádzajúci z online série videí Astrokurz (2020/21).



Astrokrúžok

<https://www.youtube.com/@astrokruzok>

Obsah

1	Slnčná sústava	4
1.1	Aspekty telies	5
1.2	Synodická a siderická perióda	8
1.3	Príklady	15
2	Keplerove zákony	17
2.1	Príklady	22
3	Gravitácia	23
3.1	3. Keplerov zákon podrobnejšie	24
3.2	Príklady	26
4	Dvojhviezda	28
4.1	A opäť 3. Keplerov zákon	30
4.2	Eliptické dráhy	31
4.3	Radiálna a tangenciálna rýchlosť	34
4.4	Príklady	35
5	Pogsonova rovnica	38
5.1	Magnitúda dvojhviezdy	39
5.2	Limitná magnitúda	41
5.3	Príklady	42
6	Žiarenie hviezd	43
6.1	Absolútne čierne teleso	44
6.2	Teplota Zeme	45
6.3	Príklady	46
7	Paralaxa	48
7.1	Absolútna magnitúda	50
7.2	Extinkcia	51
7.3	Príklady	52
8	Nebeské súradnice	53
9	Ekliptika	54
10	Ďalekohľad	55

11 Energia	56
12 Úniková rýchlosť	57
13 Moment hybnosti	58
14 Spektrálny tok	59
15 Bolometrická magnitúda	60
16 Premenné hviezdy	61
17 Farebný index	62
18 Sférická trigonometria	63
19 Astrofotografia	64
20 Dopplerov efekt	65
21 Hubblov zákon	66
22 Kozmologické modely	67
23 Gaussov zákon	68
24 Relativita	69
25 Sféricke transformácie	70
26 Približné výpočty	71

Kapitola 1

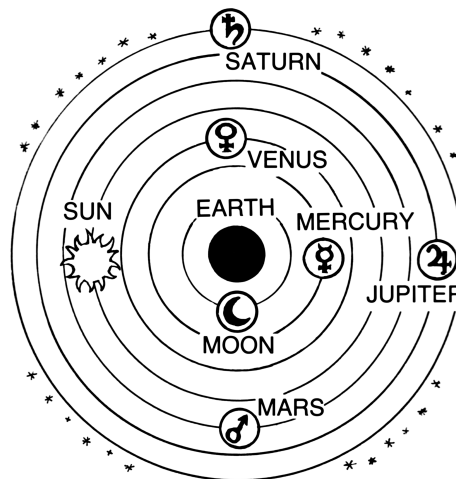
Slniečná sústava

<https://youtu.be/26Vude9QAvY>

Ľudia už od nepamäti pozorovali nočnú oblohu. Hviezdy usporiadali do súhvezdí a orientovali sa podľa nich. Všimli si však, že niektoré z nich nie sú stále, ale pohybujú sa medzi ostatnými. Nazvali ich *planétés* (tuláci), a v slovenčine ich voláme planéty. Ich pohyb bol vysvetlený tak, že obiehajú po kružniciach okolo nehybnej Zeme v strede vesmíru, pozri obr. 1.1. Takýto model slnečnej sústavy nazývame **geocentrizmus**.

Hlavným problémom geocentrizmu je, že sa planéty počas svojho pohybu na oblohe občas zastavia a na pár mesiacov putujú **retrográdnym** (opačným) smerom¹. Zobrazené to je na obr. 1.2 pre planétu Mars. Preto Ptolemaios pridal do obehu planét **epicykly**, ktorých princíp je nasledovný: Planéta obieha po kružnici, ktorej stred obieha okolo Zeme². Avšak, pridanie jedného epicyklu stále nevysvetlilo pozorované polohy planét úplne presne, a preto boli pridávané ďalšie pomocné kružnice (ďalšie epicykly), viď obr. 1.3. Výpočet je však potom natoľko zložitý, že ho ľudia v tej dobe nevedeli spraviť. Navyše, takýmto skladaním kruhových pohybov je možné vytvoriť úplne ľubovoľný pohyb (súvisí to s rozkladom funkcie do Fourierovej rady).

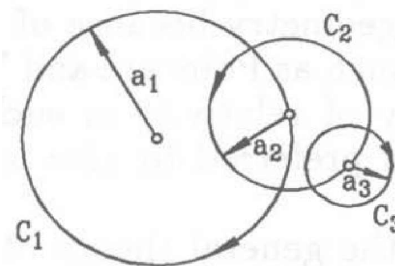
Oveľa elegantnejším riešením je umiestniť do stredu slnečnej sústavy Slnko³ (namiesto Zeme). Takýto model nazývame **heliocentrizmus**. Retrográdny pohyb v ňom vzniká úplne prirodzene, a to vďaka rozdielnym rýchlostiam planét, viď obr. 1.4 pre Zem a Mars. Tento jav nastáva vtedy, keď sú planéty blízko seba, čo odborné nazývame, že sú v nejakom aspekte. Na to aké všetky aspekty existujú sa pozrieme práve teraz.



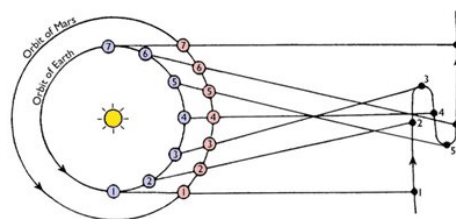
Obr. 1.1: Geocentrický model



Obr. 1.2: Retrográdny pohyb Marsu



Obr. 1.3: Znázornenie epicyklov



Obr. 1.4: Vysvetlenie retrográdneho pohybu Marsu

¹Video retrográdneho pohybu Merkúru: https://en.wikipedia.org/wiki/Apparent_retrograde_motion

²Animácia princípu fungovania epicyklov: <https://youtu.be/26Vude9QAvY&t=109>

³Najväčší epicyklus vychádzal u všetkých planét rovnako, čo je práve pohyb Zeme okolo Slnka.

1.1 Aspekty telies

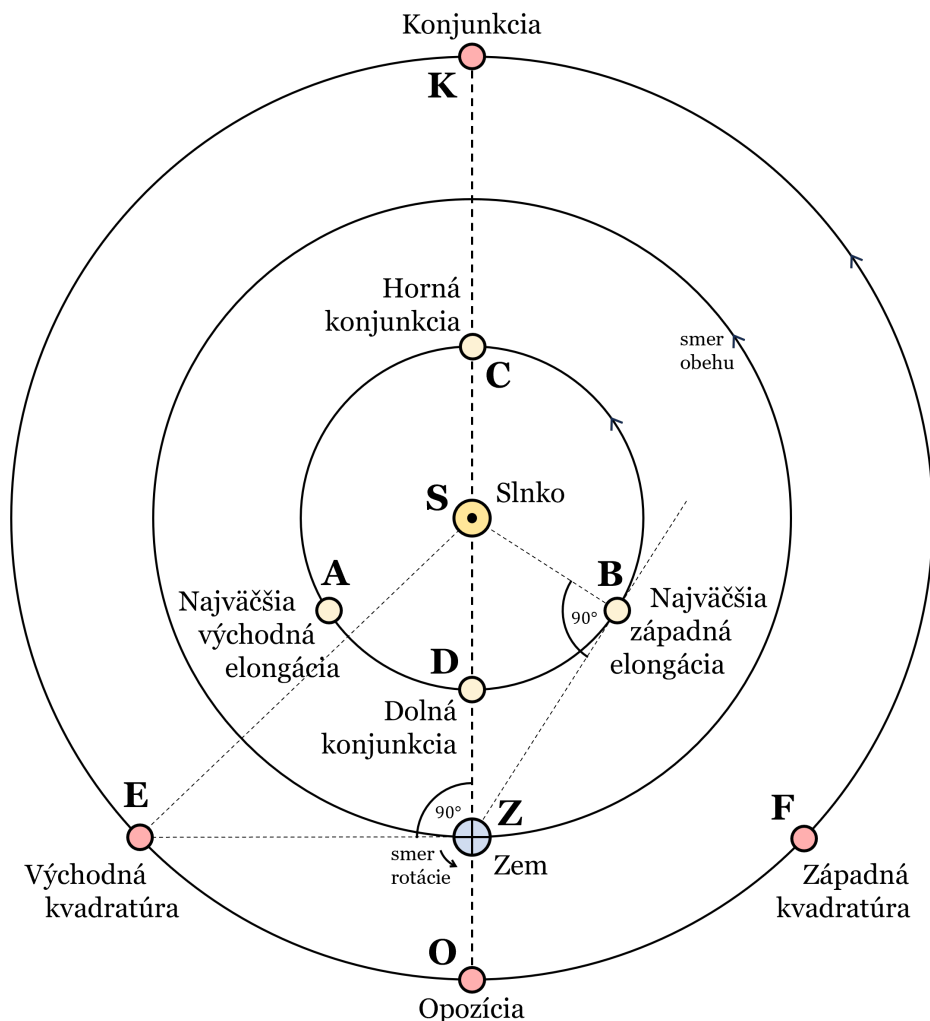
Aspekt je relatívna poloha dvoch telies pri pozorovaní z tretieho telesa. Ak nie je aspekt špecifikovaný bližšie, máme na mysli relatívnu polohu telesa (často planéty) voči Slnku pri pozorovaní zo Zeme. Telesá rozlišujeme na:

- **vnútorné** – sú bližšie k Slnku ako Zem (Merkúr a Venuša)
- **vonkajšie** – sú ďalej od Slnka ako Zem (Mars, Jupiter,...)

Medzi aspekty patrí:

- **konjunkcia** – pre vonkajšie aj vnútorné telesá (kde rozlišujeme **hornú** a **dolnú**).
- **opozícia** – iba pre vonkajšie telesá.
- **kvadratura** – iba pre vonkajšie telesá (rozlišujeme **východnú** a **západnú**, podľa toho, či sa vtedy teleso nachádza na oblohe na východ alebo západ od Slnka).
- **najväčšia elongácia** – iba pre vnútorné telesá (rozlišujeme **východnú** a **západnú**).

Významy týchto aspektov sú zobrazené na obr. 1.5 pre kruhové dráhy. Ako sa dozvieme neskôr, telesá (planéty) obiehajú na dráhach eliptických, kde vieme tieto aspekty definovať analogicky.



Obr. 1.5: Aspekty telies (často planét).

1.1.1 Vzďialenosti telies v aspektoch

Teraz sa budeme zaoberať otázkou, ako ďaleko sú telesá (planéty) od Zeme pre jednotlivé aspekty. Budeme to zisťovať geometrickými úvahami na základe obrázku 1.5 pre konkrétne prípady Venuše a Marsu. Poznáme:

- vzdialenosť Venuše od Slnka: $0,72 \text{ au} = |\overline{AS}| = |\overline{DS}| = |\overline{BS}| = |\overline{CS}|$,
- vzdialenosť Zeme od Slnka: $1 \text{ au} = |\overline{ZS}|$,
- vzdialenosť Marsu od Slnka: $1,52 \text{ au} = |\overline{ES}| = |\overline{OS}| = |\overline{FS}| = |\overline{KS}|$.

Pod **au** rozumieme **astronomickú jednotku**, čo je stredná vzdialenosť Zeme od Slnka. Jej hodnota je od roku 2012 definovaná presne, $1 \text{ au} = 149\,597\,870\,700 \text{ m}$.

Konjunkcia K (vonkajšej planéty)

V tomto aspekte je Zem, Slnko a Mars na jednej priamke, pričom Mars je najďalej od Zeme ako môže byť. Vzdialenosť Marsu od Zeme $|\overline{KZ}|$ určíme jednoducho z obrázku 1.5 ako

$$\boxed{|\overline{KZ}| = |\overline{KS}| + |\overline{ZS}|} = 1,52 \text{ au} + 1 \text{ au} = 2,52 \text{ au}, \quad (1.1)$$

Opozícia O

Opäť je Slnko, Zem a Mars na jednej priamke, tentoraz je ale Mars najbližšie k Zemi, teda

$$\boxed{|\overline{OZ}| = |\overline{OS}| - |\overline{ZS}|} = 1,52 \text{ au} - 1 \text{ au} = 0,52 \text{ au}. \quad (1.2)$$

Horná konjunkcia C

Tentoraz sa jedná o aspekt vnútornej planéty (Venuše). Situácia je ale znovu jednoduchá, pretože je na jednej priamke so Slnkom a Zemou. Analogicky prípadu konjunkcie vonkajšej planéty, pre vzdialenosť Venuše v hornej konjunkcii $|\overline{CZ}|$ platí

$$\boxed{|\overline{CZ}| = |\overline{CS}| + |\overline{ZS}|} = 0,72 \text{ au} + 1 \text{ au} = 1,72 \text{ au}. \quad (1.3)$$

Dolná konjunkcia D

Venuša sa nachádza medzi Slnkom a Zemou, takže na základe obrázku 1.5 platí

$$\boxed{|\overline{DZ}| = |\overline{ZS}| - |\overline{DS}|} = 1 \text{ au} - 0,72 \text{ au} = 0,28 \text{ au}. \quad (1.4)$$

Kvadratura E,F (východná alebo západná)

Vyznačuje sa tým, že uhol Slnko – Zem – Mars je pravý (má 90°). Vzdialenosť Marsu od Zeme vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety a jednoduchej úpravy rovnice (presun $|\overline{ZS}|^2$ na druhú stranu, výmena strán rovnice a odmocnenie⁴).

$$\text{Pytagorova veta: } |\overline{ES}|^2 = |\overline{ZS}|^2 + |\overline{EZ}|^2 \quad (\text{pre východnú kvadratúru E}), \quad (1.5)$$

$$|\overline{ES}|^2 - |\overline{ZS}|^2 = |\overline{EZ}|^2 \quad (\text{odčítanie } |\overline{ZS}|^2 \text{ od oboch strán rovnice}), \quad (1.6)$$

$$\boxed{|\overline{EZ}| = \sqrt{|\overline{ES}|^2 - |\overline{ZS}|^2}} = \sqrt{(1,52 \text{ au})^2 - (1 \text{ au})^2} \approx 1,14 \text{ au}. \quad (1.7)$$

⁴Odmocnina je inverzná operácia k mocnine, preto sa navzájom vyrušia.

Najväčšia elongácia A,B (východná alebo západná)

Nastáva, keď je vnútorné teleso (Venuša) uhlovo najďalej od Slnka. Stane sa to vtedy, keď je priamka Zem – Venuša dotyčnicou obežnej dráhy Venuše. Potom je uhol Zem – Venuša – Slnko pravý ($\sphericalangle ZBS = 90^\circ$), vid'. obrázok 1.5 a 1.6, a postup je podobný ako pri kvadrature.

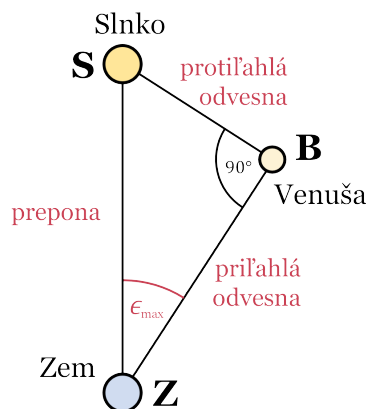
$$\text{Pytagorova veta: } |\overline{ZS}|^2 = |\overline{BS}|^2 + |\overline{BZ}|^2 \quad (\text{pre najväčšiu západnú elongáciu B}), \quad (1.8)$$

$$|\overline{ZS}|^2 - |\overline{BS}|^2 = |\overline{BZ}|^2 \quad (\text{odčítanie } |\overline{BS}|^2 \text{ od oboch strán rovnice}), \quad (1.9)$$

$$\boxed{|\overline{BZ}| = \sqrt{|\overline{ZS}|^2 - |\overline{BS}|^2}} = \sqrt{(1 \text{ au})^2 - (0,72 \text{ au})^2} \approx 0,69 \text{ au}. \quad (1.10)$$

1.1.2 Elongácia

Elongácia ϵ je uhlová vzdialenosť medzi telesom a Slnkom. Vnútorné telesá dosahujú maximálnu elongáciu ϵ_{\max} v bodoch A a B (obr. 1.5). Zaoberajme sa teraz najväčšou západnou elongáciou Venuše (bod B). Ako sme si vraveli, v tomto aspekte je $\sphericalangle ZBS = 90^\circ$, teda trojuholník $\triangle ZSB$ je pravouhlý, vid'. obr. 1.6. V pravouhlých trojuholníkoch platia vzťahy (1.11), (1.12) a (1.13) pre goniometrické funkcie, ktoré budeme potrebovať, ak chceme spočítať hodnotu ϵ_{\max} . Základné goniometrické funkcie sú **sínus** (sin), **kosínus** (cos) a **tangens** (tan).⁵



$$\sin \epsilon_{\max} = \frac{\text{protiľahlá odvesna}}{\text{prepona}} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{ZS}|}. \quad (1.11)$$

$$\cos \epsilon_{\max} = \frac{\text{priľahlá odvesna}}{\text{prepona}} = \frac{|\overline{BZ}|}{|\overline{ZS}|}. \quad (1.12)$$

$$\tan \epsilon_{\max} = \frac{\text{protiľahlá odvesna}}{\text{priľahlá odvesna}} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{BZ}|}. \quad (1.13)$$

Obr. 1.6: Najväčšia elongácia.

Keďže poznáme $|\overline{BS}| = 0,72 \text{ au}$ a $|\overline{ZS}| = 1 \text{ au}$ (protiľahlú odvesnu a preponu), tak na výpočet najväčšej elongácie ϵ_{\max} využijeme funkciu sínus definovanú vzťahom (1.11). Na vyjadrenie ϵ_{\max} potrebujeme poznať inverznú funkciu k sínusu. Tou je arkus-sínus (arcsin), na kalkulačkách často zapisovaný ako \sin^{-1} . Úprava vyzerá nasledovne

$$\sin \epsilon_{\max} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{ZS}|} \Rightarrow \boxed{\epsilon_{\max} = \arcsin\left(\frac{|\overline{BS}|}{|\overline{ZS}|}\right)} = \arcsin\left(\frac{0,72 \text{ au}}{1 \text{ au}}\right) \approx 46^\circ. \quad (1.14)$$

Zo znalosti $\epsilon_{\max} \approx 46^\circ$ vieme vypočítať vzdialenosť Venuše v najväčšej elongácii od Zeme $|\overline{BZ}|$ alternatívnym spôsobom ako v (1.10). A to využitím definície kosínusu (1.12) nasledovne

$$\cos \epsilon_{\max} = \frac{|\overline{BZ}|}{|\overline{ZS}|} \Rightarrow \boxed{|\overline{BZ}| = |\overline{ZS}| \cdot \cos \epsilon_{\max}} = 1 \text{ au} \cdot \cos 46^\circ \approx 0,69 \text{ au}. \quad (1.15)$$

⁵Viete ich nájsť ako tlačidlá na kalkulačke.

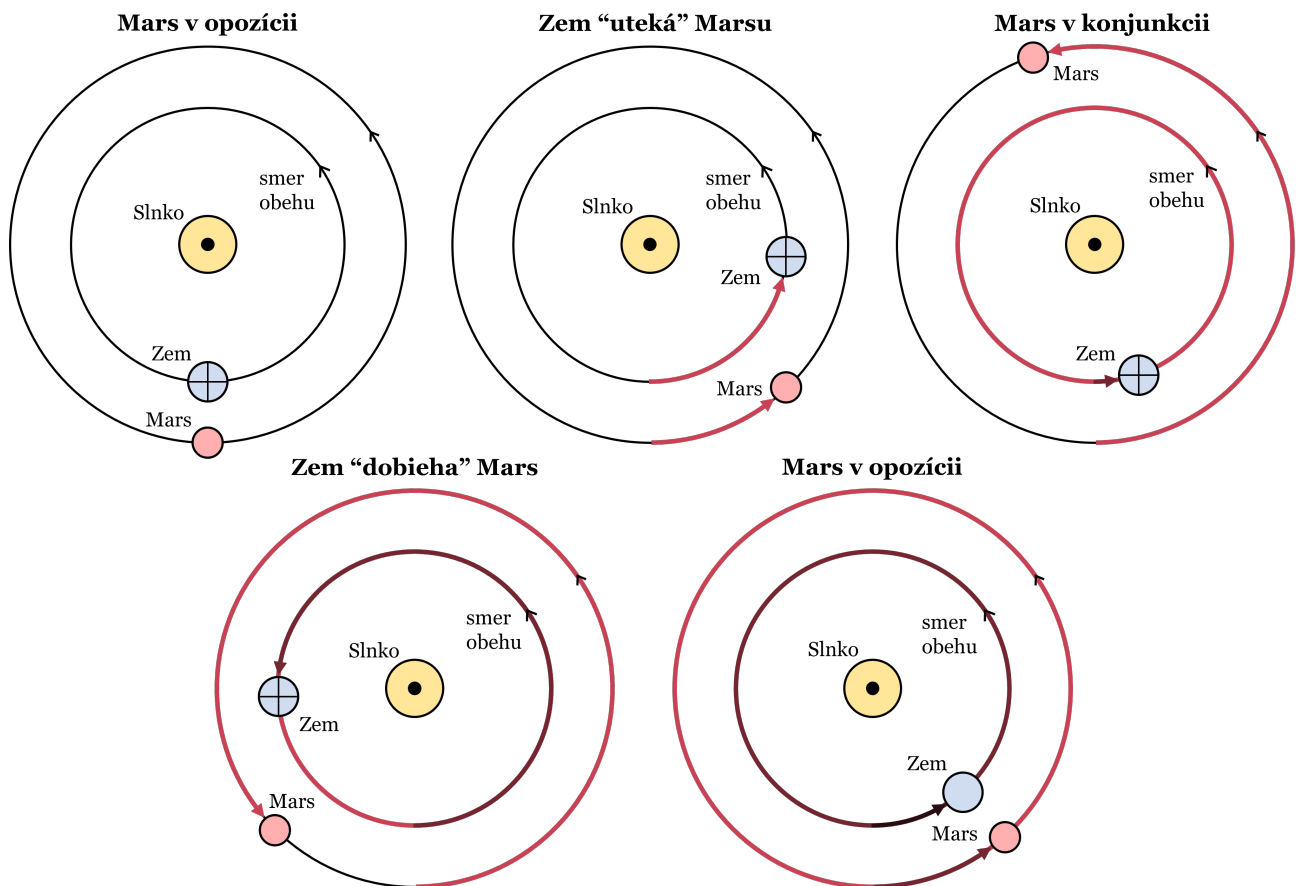
1.2 Synodická a siderická perióda

- **Siderický pohyb** – pohyb *vzhľadom na vzdialené hviezdy*. Ide o reálny fyzikálny pohyb telies, napríklad doba obehu Zeme okolo Slnka, či doba rotácie Zeme okolo jej osi.
- **Synodický pohyb** – *relatívny pohyb vzhľadom na Slnko*. Ide o *zdanlivé* vnímanie pri pohľade z pohyblivého miesta, väčšinou Zeme. Pod synodickou periódou rozumieme dobu, ktorá uplynie pokým sa teleso dostane do rovnakej polohy (aspektu) voči Slnku. Napríklad: doba od opozície do opozície, od splnu do splnu, či od poludnia po poludnie.

1.2.1 Ako často je Mars v opozícii?

Fyzikálna obežná doba (perióda) Marsu okolo Slnka je $P_{\text{Mars}} = 1,88$ roka a Zeme $P_{\text{Zem}} = 1$ rok⁶. Tieto periódy voláme siderické, a budeme ich označovať písmenom **P** s indexom planéty.

Všimnime si, že obežná doba Marsu je väčšia ako obežná doba Zeme. To znamená, že Zem obieha okolo Slnka rýchlejšie ako Mars. Z toho vyplýva, že po tom, ako bol Mars v opozícii, tak mu Zem začne „utekať“ dopredu. Vidíme to na obr. 1.7, ktorý vyobrazuje časový úsek od opozície do opozície Marsu, teda jednu synodickú periódu. Tú budeme označovať písmenom **T**.



Obr. 1.7: Jedna synodická perióda Marsu (T), „na etapy“ od opozície do opozície. Všimnime si, že Zem spravila o jeden siderický obeh okolo Slnka viac ako Mars.

⁶1 rok = 365,25 dní, kde 1 deň = 24 h, teda čas od poludnia po poludnie (synodický).

Popíšme si podrobnejšie obrázok 1.7. Štartovná a cieľová situácia je moment, kedy je Slnko, Zem a Mars na jednej priamke (opozícia). Keďže Zem obieha okolo Slnka rýchlejšie ako Mars, tak bude Marsu „utekať“. Ich relatívna vzdialenosť bude postupne rásť, až sa dostanú opäť na jednu priamku, ale tentoraz bude Mars na opačnej strane od Slnka ako Zem, teda v konjunkcii.

Ako bude čas ubiehať ďalej, tak Zem začne „dobiehať“ Mars z opačnej strany ako mu „ušla“, až opäť nastane opozícia. Tento sled udalostí od opozície do opozície bude trvať synodickú dobu T , počas ktorej **Zem urobí o jeden obeh okolo Slnka viac ako Mars**. Matematicky

$$\boxed{N_{\oplus} = N_{\delta} + 1}, \quad (1.16)$$

kde N_{\oplus} je počet siderických obbehov Zeme okolo Slnka a N_{δ} je počet siderických obbehov Marsu okolo Slnka. Počet obbehov v tomto prípade nemusí byť celé číslo. Oběhy Zeme a Marsu okolo Slnka, sa realizujú počas synodickej doby T . To znamená, že čas T je rovný počtu obbehov N , krát dĺžka jedného obehu P , čo vieme zapísať dvojako,

$$T = N_{\oplus} P_{\oplus} \quad (\text{pre Zem}), \quad (1.17)$$

$$T = N_{\delta} P_{\delta} \quad (\text{pre Mars}). \quad (1.18)$$

Ale pozor! Vzťahy (1.17) a (1.18) platia len pre **kruhové dráhy**, pre ich platnosť je dôležité, aby sa telesá na dráhach pohybovali rovnomerne. Avšak, ako si ukážeme neskôr, na dráhe, ktorá nemá konštantnú vzdialenosť od Slnka, sa teleso pohybuje tým rýchlejšie, čím bližšie je k centrálnemu objektu (Slnku). V takomto prípade je situácia zložitejšia, pretože synodická perióda T *nie je* konštantna, ale kolíše okolo nejakej strednej hodnoty. Každopádne, dráhy planét sú veľmi blízke kružniciam, preto je pre nich tento prístup dobrou aproximáciou.

Vráťme sa k rovniciam (1.16), (1.17) a (1.18) a dajme ich vhodne dokopy. Všetka informácia je už uložená v nich. Začneme vyjadrením N_{\oplus} a N_{δ} z (1.17) a (1.18),

$$N_{\oplus} = \frac{T}{P_{\oplus}} \quad , \quad N_{\delta} = \frac{T}{P_{\delta}}. \quad (1.19)$$

Dosadením do (1.16) a úpravou dostávame

$$\frac{T}{P_{\oplus}} = \frac{T}{P_{\delta}} + 1 \quad (\text{obe strany rovnice vydáme } T), \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{P_{\oplus}} = \frac{1}{P_{\delta}} + \frac{1}{T} \quad (\text{preusporiadame členy}), \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_{\delta}} = \frac{P_{\delta} - P_{\oplus}}{P_{\oplus} P_{\delta}}, \quad (1.22)$$

$$\boxed{T = \frac{P_{\oplus} P_{\delta}}{P_{\delta} - P_{\oplus}}} \approx 2,14 \text{ roka}. \quad (1.23)$$

Ako využiť tento výsledok v praxi? Keď je Mars v opozícii, tak je na opačnej strane ako Slnko a najbližšie k Zemi ako môže byť. To znamená, že je vtedy zo Zeme najlepšie pozorovateľný. Výpočtom synodickej periódy T sme zistili, že tieto vhodné podmienky na pozorovanie nastávajú raz za 2,14 roka. Takisto v období opozície je najvýhodnejšie letieť k Marsu, keďže je blízko. Preto, ak sa pozriete na zoznam misí na Mars⁷, tak sú vždy po približne dvoch rokoch.

⁷Dá sa nájsť napríklad tu: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_missions_to_Mars

Synodická perióda Venuše

Aká bude synodická perióda vnútornej planéty, napríklad Venuše? Tu je dôležitý rozdiel ten, že Zem obieha okolo Slnka *pomalšie* ako Venuša, ktorej siderická perióda je $P_{\ominus} = 0,615$ roka. Tým pádom, teraz bude Venuša tá, ktorá spraví o jeden obeh okolo Slnka viac,

$$\boxed{N_{\ominus} = N_{\oplus} + 1}. \quad (1.24)$$

Vidíme tu priamu analógiu so vzorcom (1.16), jediná zmena je zámena indexov $\oplus \rightarrow \ominus$, $\ominus \rightarrow \oplus$. Preto je výsledný vzorec pre synodickú periódu T rovný vzorcu (1.23) so zamenenými indexmi,

$$\boxed{T = \frac{P_{\ominus}P_{\oplus}}{P_{\oplus} - P_{\ominus}}} \approx 1,60 \text{ roka}. \quad (1.25)$$

Overenie ponechávame čitateľovi ako úlohu na precvičenie.

Zovšeobecnenie

Je dôležité uvedomiť si, že **synodická perióda je spoločnou vlastnosťou dvoch telies**. Napríklad, keď sme spočítali, že Mars sa dostane do opozície raz za 2,14 roka, tak to znamená, že pri pohľade z Marsu sa Zem dostane do dolnej konjunkcie rovnako raz za 2,14 roka. Preto hovoríme dokopy o *synodickej perióde Zeme a Marsu*. V oboch pohľadoch totižto platí kľúčový vzorec (1.16), pripomeňme: $N_{\oplus} = N_{\ominus} + 1$, ktorý teraz zovšeobecníme.

Majme dve telesá. Jedno k Slnku bližšie, ktoré budeme volať *vnútorné*, a jedno od Slnka ďalej, to bude *vonkajšie*. Vnútorne teleso vždy obieha Slnko rýchlejšie ako vonkajšie⁸. Preto vo všeobecnosti, po uplynutí jednej synodickej periódy T bude počet obbehov vnútorného telesa o jedna väčší ako počet obbehov vonkajšej planéty, teda

$$\boxed{N_{\text{vnútorné}} = N_{\text{vonkajšie}} + 1}. \quad (1.26)$$

Analogicky k odvodeniu pre Mars (či Venušu) dostávame výsledný vzťah

$$\boxed{T = \frac{P_{\text{vnútorné}} P_{\text{vonkajšie}}}{P_{\text{vonkajšie}} - P_{\text{vnútorné}}}}. \quad (1.27)$$

Ale pozor! Problematická situácia nastáva, ak vonkajšie teleso obieha opačným smerom ako vnútorné. Potom je synodická perióda kratšia ako siderická, pretože sa telesá pohybujú proti sebe a skôr sa opäť „stretnú“. Elegantným riešením je v takomto prípade považovať počet obbehov *vonkajšieho* telesa $N_{\text{vonkajšie}}$ a jeho siderickú periódu $P_{\text{vonkajšie}}$ za *záporné*. Takýmto prístupom zachováme platnosť vzťahov (1.26) a (1.27).

Retrográdny obeh

Predstavme si asteroid, ktorý obieha okolo Slnka 2 roky v opačnom (retrográdnom) smere ako Zem. Vnútorným telesom je Zem, s kladnou periódou, $P_{\text{vnútorné}} = 1$ rok. Asteroid je vonkajším telesom, teda formálne je jeho perióda záporná, $P_{\text{vonkajšie}} = -3$ roky. Dosadením do (1.27)

$$T = \frac{1 \text{ rok} \cdot (-3 \text{ roky})}{-3 \text{ rok} - 1 \text{ roky}} = \frac{-3 \text{ roky}}{-4 \text{ roky}} = 0,75 \text{ roka}. \quad (1.28)$$

⁸Vyplýva to z teórie gravitácie, ktorú si predstavíme v kapitole 3.

Synodická perióda je menšia ako siderická perióda Zeme aj asteroidu. To je výsledok, ktorý sme očakávali, pretože sa telesá pohybujú „proti sebe“. Vo všeobecnosti

- $T > P_{\text{vnútorné}} < P_{\text{vonkajšie}}$ ak telesá obiehajú Slnko rovnakým smerom,
- $T < P_{\text{vnútorné}} < P_{\text{vonkajšie}}$ ak telesá obiehajú Slnko opačným smerom.

Overme ešte platnosť vzťahu (1.26). Pre počty obehov platia zovšeobecnenia vzťahov (1.19)

$$N_{\text{vnútorné}} = \frac{T}{P_{\text{vnútorné}}} \quad , \quad N_{\text{vonkajšie}} = \frac{T}{P_{\text{vonkajšie}}} \quad , \quad (1.29)$$

po dosadení čísiel

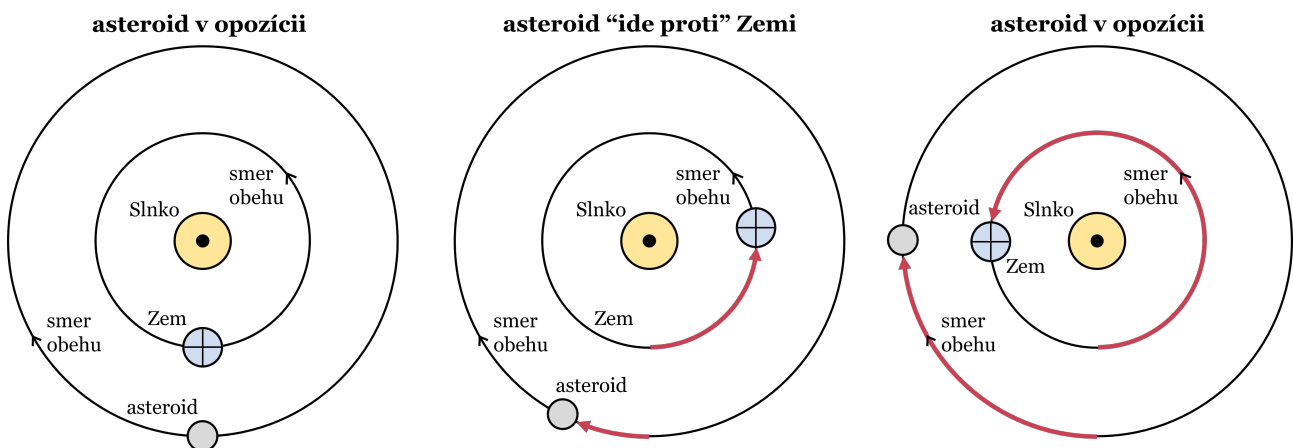
$$N_{\text{vnútorné}} = \frac{0,75 \text{ roka}}{1 \text{ rok}} = 0,75 \quad , \quad N_{\text{vonkajšie}} = \frac{0,75 \text{ roka}}{-3 \text{ roky}} = -0,25 \quad , \quad (1.30)$$

a po dosadení do (1.26) získame identitu, čo potvrdzuje platnosť tohto vzťahu.

$$(1.26) : \quad N_{\text{vnútorné}} = N_{\text{vonkajšie}} + 1 \quad , \quad (1.31)$$

$$\text{po dosadení: } 0,75 = -0,25 + 1 \quad \text{čo platí.} \quad (1.32)$$

Vnútorné teleso (Zem) spravilo $0,75 = 3/4$ obehu a vonkajšie teleso (asteroid) spravilo $0,25 = 1/4$ obehu opačným smerom, čo symbolizuje záporné znamienko. Dokopy $1/4$ a $3/4$ dávajú celý obeh, takže predchádzajúci výpočet dáva zmysel. Telesá sa opäť „stretnú“ na jednej priamke, čo je zobrazené na obrázku 1.8 nižšie.



Obr. 1.8: Synodická doba telesa s retrográdnym obehom.

Všimnime si, že telesá (Zem a asteroid) spravia dokopy (v súčte) jeden obeh okolo Slnka.

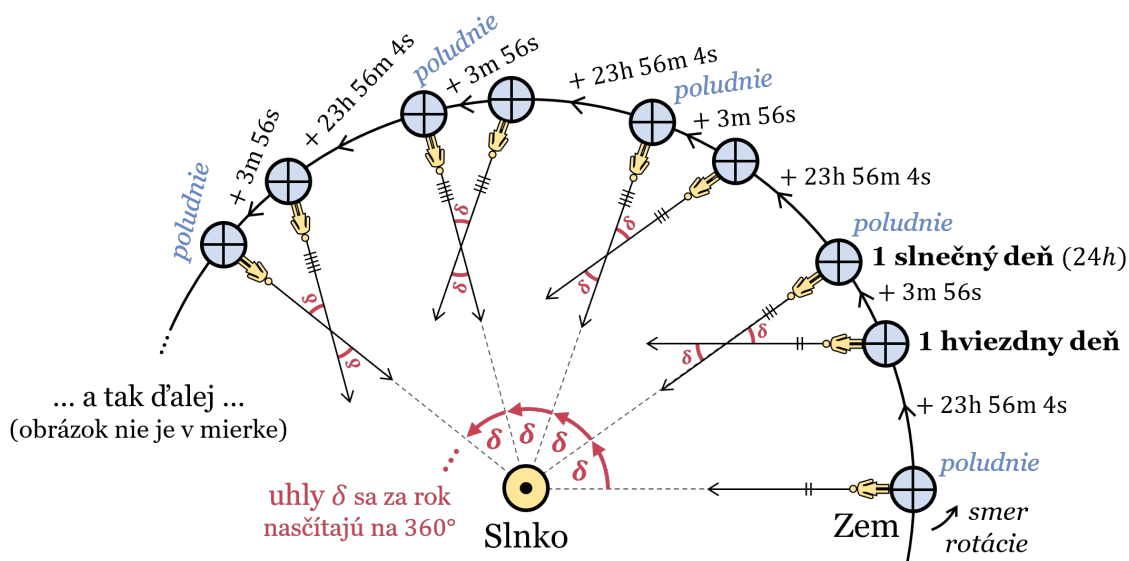
Poznámka o kruhových dráhach

Ešte raz by sme chceli upozorniť, že všetky výpočty synodickej periódy v tejto kapitole platia **iba pre kruhové dráhy**. Inak je situácia oveľa komplikovanejšia a synodická perióda prestáva byť konštantná. Pre telesá s vysoko sploštenou dráhou, ako sú napríklad kométy, je vysoko nesprávne počítať synodickú dobu týmto jednoduchým spôsobom.

1.2.2 Slnecný a hviezdny deň

Medzi siderickou a synodickou periódou rozlišujeme aj v prípade rotácie telies, napríklad Zeme. Fyzikálna doba rotácie Zeme (siderická) je $t_{\text{sid}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$ (ukážeme výpočtom). Je to doba, ktorá uplynie, pokým sa vzdialená hviezda dostane na oblohu na to isté miesto (napríklad do kulminácie). Preto túto dobu voláme **hviezdny deň** a je na ňu naviazaný **hviezdny čas**.

Pod synodickou dobu rotácie rozumieme dobu od poludnia po poludnie, čo trvá o trochu dlhšie, konkrétne (v priemere) $t_{\text{syn}} = 24 \text{ h}$. Túto dobu voláme aj, jednoducho, **deň**, a čas na ňu naviazaný **stredný slnečný čas**. Poludnie nastane o trochu neskôr ako sa Zem otočí okolo svojej osi kvôli tomu, že sa Zem navyše pohybuje na dráhe okolo Slnka. Zobrazuje to obrázok 1.9.



Obr. 1.9: Znázornenie rozdielu medzi slnečným a hviezdňým dňom. Po tom ako uplynie hviezdny deň, tak sa Zem musí dotočiť o uhol δ , a až potom uplynie slnečný deň.

Hviezdny deň je kratší ako slnečný, pretože Zem obieha okolo Slnka rovnakým smerom, ako rotuje. To znamená, že po tom, ako spraví jednu siderickú rotáciu voči hviezdám, tak sa musí ešte trochu dotočiť, aby bola v rovnakej polohe voči Slnku⁹. Tieto malé dotočenia sa počas roka poskladajú na jednu celú otočku, čo znamená, že počet hviezdnych (siderických) dní v roku N_{sid} je o jeden väčší ako počet synodických (slnečných) dní v roku N_{syn} .

$$\boxed{N_{\text{sid}} = N_{\text{syn}} + 1}, \quad (1.33)$$

kde vidíme jasnú paralelu so vzorcami (1.16), (1.24) či (1.26). Pokračujeme obdobne ako predtým: celý proces sa udeje za jeden rok, teda za čas $P_{\oplus} = 365,25 \cdot 24 \text{ h} = 8766 \text{ h}$, pričom platí $N_{\text{sid}} = P_{\oplus}/t_{\text{sid}}$ a $N_{\text{syn}} = P_{\oplus}/t_{\text{syn}}$. Nakoniec dosadením do (1.33) a následnou úpravou získavame

$$\frac{P_{\oplus}}{t_{\text{sid}}} = \frac{P_{\oplus}}{t_{\text{syn}}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{t_{\text{sid}}} = \frac{1}{t_{\text{syn}}} + \frac{1}{P_{\oplus}} \Rightarrow \boxed{t_{\text{sid}} = \frac{t_{\text{syn}} P_{\oplus}}{P_{\oplus} + t_{\text{syn}}} \approx 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}. \quad (1.34)$$

Každým hviezdňým dňom sa teda hviezdny čas posunie o 3 min 56 s voči slnečnému času. Za rok sa tento posun nasčíta na 24 h.¹⁰ Po roku sa tým pádom hviezdny a slnečný čas opäť zladia.

⁹Animácia rozdielu medzi hviezdňým a slnečným dňom: <https://youtu.be/bkUP3F9g0twk&t=247>

¹⁰Hviezdňých dní je v roku o jeden viac ako slnečných, teda $366,25 \cdot 3 \text{ min } 56 \text{ s} \approx 24 \text{ h}$.

Retrográdna rotácia

Väčšina telies Slnecnej sústavy rotuje v rovnakom smere, ako obieha okolo Slnka (alebo iného centrálného telesa). Preto je na nich vzťah synodickej a siderickej periódy podobný ako na Zemi. Riadi sa rovnicami (1.33) a (1.34) a synodická doba rotácie je väčšia ako siderická. Avšak existujú výnimky, a to napríklad Venuša, ktorá rotuje retrográdne (opačne)¹¹. Deň na Venuši je **kratší ako hviezdny deň**. Pri výpočte dĺžky dňa na Venuši však stále môžeme použiť vzťahy (1.33) a (1.34) (po zámene $\oplus \rightarrow \ominus$) podobným spôsobom ako pri retrográdnom obehu.

Pri retrográdnom obehu budeme formálne považovať siderické aj synodické doby rotácie aj počty obehov za *záporné*, teda

$$t_{\text{sid}}, t_{\text{syn}}, N_{\text{sid}}, N_{\text{syn}} < 0. \quad (1.35)$$

Deň na Venuši (od poludnia po poludnie) trvá $t_{\text{syn}} = -116,75$ dňa¹² a jej obeh okolo Slnka $P_{\ominus} = 224,70$ dňa. Dosadením do (1.34) s modifikáciou $\oplus \rightarrow \ominus$ dostávame

$$t_{\text{sid}} = \frac{t_{\text{syn}} P_{\ominus}}{P_{\ominus} + t_{\text{syn}}} = \frac{-116,75 \text{ dňa} \cdot 224,70 \text{ dňa}}{224,70 \text{ dňa} - 116,75 \text{ dňa}} \approx -243,02 \text{ dňa}. \quad (1.36)$$

Siderická doba rotácie je podľa očakávania záporná a dlhšia (v absolútnej hodnote) ako synodická. Dokonca vidíme, že jedna rotácia Venuše okolo jej osi trvá dlhšie ako jej obeh okolo Slnka. Pre počty rotácií dostávame

$$N_{\text{sid}} = \frac{P_{\ominus}}{t_{\text{sid}}} = \frac{224,70 \text{ dňa}}{-243,02 \text{ dňa}} \approx -0,9246, \quad (1.37)$$

$$N_{\text{syn}} = \frac{P_{\ominus}}{t_{\text{syn}}} = \frac{224,70 \text{ dňa}}{-116,75 \text{ dňa}} \approx -1,9246, \quad (1.38)$$

čím sme potvrdili platnosť vzťahu (1.33), keďže

$$(1.33): \quad N_{\text{sid}} = N_{\text{syn}} + 1, \quad (1.39)$$

$$\text{po dosadení:} \quad -0,9246 = -1,9246 + 1 \quad \text{čo platí.} \quad (1.40)$$

Retrográdna rotácia sa takisto zvykne charakterizovať sklonom rotačnej osi voči kolmici na rovinu obehov ε väčším ako 90° . Z planét Slnecnej sústavy sa s tým stretávame pri Venuši ($\varepsilon_{\ominus} = 177,36^\circ$) a Uráne ($\varepsilon_{\Upsilon} = 97,77^\circ$).

O retrográdnych pohyboch

Pri retrográdnom obehu alebo rotácii, je možné používať rovnaké vzťahy ako pri prográdnom obehu a rotácii, ak modifikujeme retrográdne periódy alebo doby rotácie, za formálne *záporné*.

¹¹Pravdepodobne to v minulosti zapríčinila zrážka s obrovským asteroidom.

¹²Áno, vskutku! Venuša nielenže rotuje retrográdne, ale navyše aj veľmi veľmi pomaly.

1.2.3 Spln Mesiaca

Na záver kapitoly sa pozrime na problém: Ako často nastane spln Mesiaca? Aj tu je dôležité nezabudnúť na pohyb Zeme okolo Slnka. Fyzikálne (sidericky) má Mesiac periódu obehu okolo Zeme $t_{\text{sid}} = 27,32$ dňa, a budeme predpokladať, že obieha na kruhovej dráhe (rovnako to predpokladáme aj pre dráhu Zeme). Spln však nastane až po synodickej dobe, pretože je naviazaný na pozíciu vzhľadom na Slnko¹³. Keďže Mesiac obieha Zem v rovnakom smere ako Zem obieha Slnko, tak situácia je veľmi podobná ako v predchádzajúcej podsekcii 1.2.2.

Predstavme si, že v tomto momente nastal spln Mesiaca, a to blízko hviezdy Regulus. Spln znamená, že Mesiac je v opozícii, teda Slnko je na opačnej strane oblohy, a to v súhvezdí Vodnár. Teraz nechajme plynúť čas. Po 27,32 dňoch vykoná Mesiac jeden siderický obeh okolo Zeme a bude sa opäť nachádzať pri hviezde Regulus. Avšak, teraz už nebude spln! Je to preto, lebo Zem sa medzičasom posunie na svojej dráhe okolo Slnka, čo znamená, že pri pohľade zo Zeme sa Slnko na oblohe posunie (pozdĺž ekliptiky) a „utečie“ do susedného zvieratníkového súvezdia, a to do Rýb. Oproti tomuto súhvezdiu je na oblohe súhvezdie Panna. Mesiac bude musieť po oblohe ešte asi 2 dni putovať, aby sa do tohto súhvezdia dostal, a bol opäť presne oproti Slnku. Až vtedy nastane jeho spln.

Keď to zhrnieme: Po tom, ako uplynie siderická perióda 27,32 dňa musí prejsť ešte nejaká doba (ktorú chceme zistiť) aby nastala synodická perióda. To je presne situácia z obrázku 1.9, jedine, čísla sú iné. To ale znamená, že všetky úvahy a vzorce ktoré potom nasledovali budú totožné, zmenia sa iba čísla, ktoré dosadzujeme a výsledky ktoré získame.

Vyjdime teda z rovníc (1.33) a (1.34). Predtým sme vyjadrili t_{sid} pomocou t_{syn} . Teraz však t_{sid} poznáme a naším cieľom je vyjadriť synodickú dobu t_{syn} , teda

$$N_{\text{sid}} = N_{\text{syn}} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t_{\text{sid}}} = \frac{1}{t_{\text{syn}}} + \frac{1}{P_{\oplus}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{syn}} = \frac{t_{\text{sid}}P_{\oplus}}{P_{\oplus} - t_{\text{sid}}}} \approx 29,53 \text{ dňa} . \quad (1.41)$$

Zisťujeme, že spln Mesiaca nastáva každých 29,53 dňa. To je dôsledok jeho siderickej peródy t_{sid} a toho, že obieha okolo Zeme. Ak by obiehal s rovnakou siderickou periódou okolo inej planéty, tak by vyšla iná synodická doba t_{syd} . Napríklad, ak by Mesiac obiehal Mars, ktorého siderická perióda je $P_{\mathcal{G}} = 1,8808$ roka = 686,98 dňa, tak potom

$$t_{\text{syn}} = \frac{t_{\text{sid}}P_{\mathcal{G}}}{P_{\mathcal{G}} - t_{\text{sid}}} = \frac{27,32 \text{ dňa} \cdot 686,98 \text{ dňa}}{686,98 \text{ dňa} - 27,32 \text{ dňa}} \approx 28,45 \text{ dňa} . \quad (1.42)$$

Synodická perióda je kratšia ako v prípade obehu Mesiaca okolo Zeme, pretože obežná doba Marsu je väčšia ako obežná doba Zeme. To znamená, že za dobu kým Mesiac obehne planétu, tak sa Mars stihne „posunúť“ menej ako Zem. Na druhú stranu pre vnútornú planétu, ktorej obežná doba je kratšia ako Zeme, dostaneme synodickú periódu dlhšiu. Napríklad pre Venušu, ktorej $P_{\heartsuit} = 0,61520$ roka = 224,70 dňa dostávame

$$t_{\text{syn}} = \frac{t_{\text{sid}}P_{\heartsuit}}{P_{\heartsuit} - t_{\text{sid}}} = \frac{27,32 \text{ dňa} \cdot 224,70 \text{ dňa}}{224,70 \text{ dňa} - 27,32 \text{ dňa}} \approx 31,10 \text{ dňa} . \quad (1.43)$$

¹³Aby nastal spln, tak sa Mesiac musí dostať oproti Slnku, teda do opozície.

1.3 Príklady

1.3.1 Erastotenes a polomer Zeme

V roku 240 p.n.l. žil v starovekej Alexandrii filozof Erastotenes. Počas letného slnovratu prišiel cestovateľ z mesta Syene a tvrdil, že u nich v ten deň na poludnie ľudia nevrhajú tieň. To zaujalo Erastotenesa, pretože u nich sa to nikdy nedialo. Zmeral, že telesá na poludnie vrhajú tieň pod uhlom päťdesiatiny kruhu.

Erastotenes si uvedomil, že by z tejto informácie mohol určiť aká je Zem veľká. V tej dobe sa už vedelo, že Zem je guľatá a Slnko veľmi ďaleko. Zároveň bolo známe ako dlho trvá cesta medzi Alexandriou a Syene. Preto Erastotenes zaplatil človeka, ktorý nasimuloval túto cestu na štadióne, a určil vzdialenosť z Alexandrie do Syene na 6200 štadiónov.

Avšak pri ceste z Alexandrie do Syene museli cestovatelia prekonávať rôzne terénne prekážky, čo navyšovalo dĺžku a čas ich cesty. Erastotenes odhadol, že po dokonalej Zemi v tvare gule by vyšlo približne 5000 štadiónov. Štadión je dĺžková miera, ktorá sa v tej dobe používala. Vedú sa spory aká je jeho dĺžka, možnosti sú od 149 m do 185 m.

Aký polomer Zeme vyšiel Erastotenovi? Výsledok určite v štadiónoch a možný interval v kilometroch.

1.3.2 Aristarchus a vzdialenosť Slnka voči Mesiacu

V treťom storočí p.n.l. sa starogrécky astronóm Aristarchus pokúsil zmerať koľkokrát ďalej je Slnko voči Mesiacu. V tej dobe sa vedelo, že Mesiac nežiari vlastným svetlom, ale odráža to slnečné. Úvaha bola nasledovná: Ak by bolo Slnko nekonečne ďaleko, tak by v momente kedy je osvetlená presne polovica Mesiaca, tak uhlová vzdialenosť Slnka a Mesiaca bude rovná štvrtine kruhu. Ak nie, tak čím je táto uhlová vzdialenosť menšia, tým je Slnko bližšie.

Bol to geniálny nápad, ale bohužiaľ v tejto dobe to bolo veľmi ťažké odmerať. Aristarchus určil, že uhlová vzdialenosť Slnka a polovičného Mesiaca je zmenšená voči štvrtine kruhu o maximálne jednu tridsatinu.

Minimálne koľkokrát je Slnko ďalej ako Mesiac podľa Aristarchusa?

1.3.3 Synodický a siderický obeh Mesiaca

Pri pozorovaní zo Zeme vidíme spln Mesiaca každých 29,53 dňa, čo je synodická doba obehu. Aká je jeho siderická doba obehu, teda reálna fyzikálna doba obehu voči vzdialeným hviezdám? Výsledok určite v dňoch. Mesiac obieha okolo Zeme v rovnakom smere ako Zem okolo Slnka. Jeden rok (obeh Zeme okolo Slnka) trvá 365,25 dní.

1.3.4 Aspekty planét z Marsu

Predstavme si, že sme na Marse a pozorujeme Zem v najväčšej elongácii, a zároveň Jupiter v kvadratúre. Ako vzdialená je od nás (Marsu) Zem, a ako vzdialený je Jupiter? Vzdialenosť Marsu od Slnka je $a_M = 1,5$ au a vzdialenosť Jupitera od Slnka je $a_J = 5,2$ au. Výsledok určite v astronomických jednotkách.

Bonus: Aká je uhlová vzdialenosť Zeme od Slnka a aká je vzdialenosť Zeme od Jupitera?

1.3.5 Výsledky

Erastotenes a polomer Zeme

Približne 39 800 štadiónov, čo je interval od 5929 km do 7361 km.

Skutočná hodnota polomeru Zeme (6371 km) je vskutku v tomto intervale.

Aristarchus a vzdialenosť Slnka voči Mesiacu

Slnko je minimálne 19-krát ďalej ako Mesiac. Skutočná hodnota je skoro 400-krát, ale tak či tak ľudia v tej dobe získali predstavu o rozmeroch vesmíru. O tom, že Slnko je o dosť ďalej voči Mesiacu, čo pomohlo pri vytváraní modelov slnečnej sústavy.

Synodický a siderický obeh Mesiaca

Je to 27,32 dní.

Aspekty planét z Marsu

Vzdialenosť Mars – Zem je 1,1 au, Mars – Jupiter je 5,0 au.

Bonus: Uhlová vzdialenosť Zeme od Slnka je 42° a vzdialenosť Zem – Jupiter je 4,2 au.

Kapitola 2

Keplerove zákony

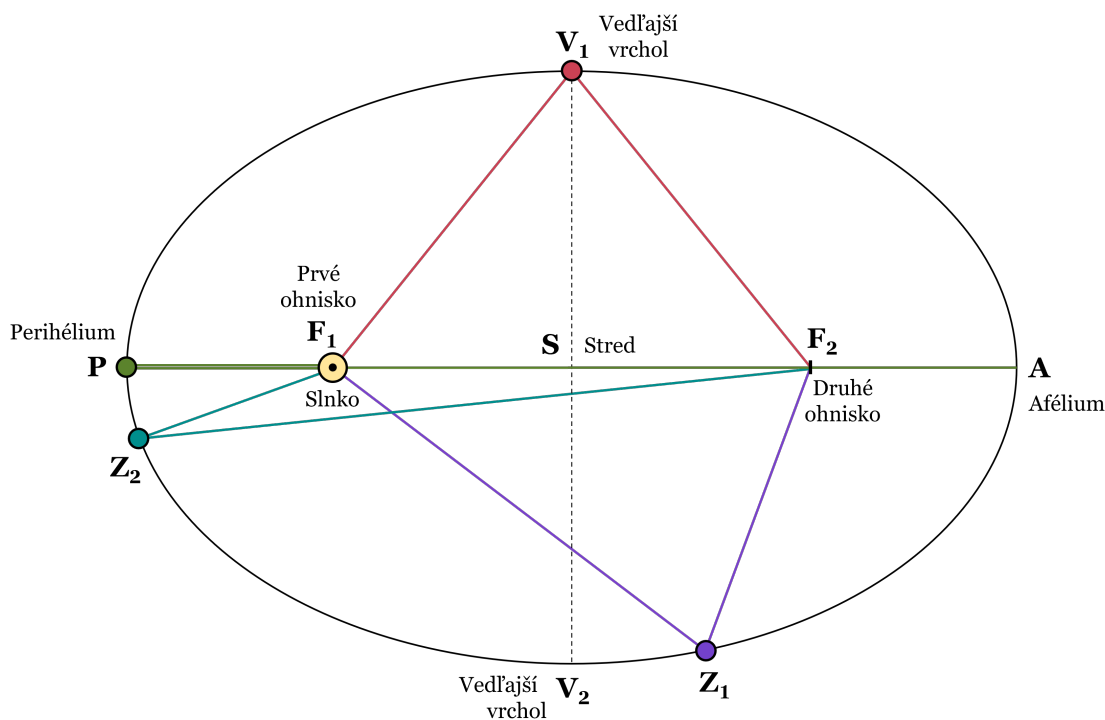
<https://youtu.be/s2QZwM1nbWQ>

Teória heliocentrizmu sa čím ďalej tým viac dostávala do popredia, avšak presné pozorovania Tycha de Brahe nesúhlasili s teoretickými predpoveďami pre kruhové dráhy. Z týchto meraní Johannes Kepler vydedukoval tri zákony, ktoré sú rozšíriteľné na obecnú sústavu dvoch gravitačne viazaných telies. My si predstavíme ich zjednodušené historické znenie.

1. Keplerov zákon (o dráhe) (KZ-1)

Dráhy planét sú eliptické. Slnko sa nachádza v jednom z ohnísk elipsy.

Elipsa (obr. 2.1) je definovaná ako množina bodov, ktoré majú konštantný súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov, **ohnísk** (F_1, F_2). Matematicky je to zapísané v (2.1). Slnko sa nachádza v ohnisku F_1 . Bod kedy je planéta najbližšie ku Slnku voláme **perihélium** (P), a bod kedy je od neho najďalej **afélium** (A). Bod S predstavuje stred a body V_1, V_2 vedľajšie vrcholy elipsy. Z_1, Z_2 sú arbitrárne zvolené body pre potreby nadchádzajúceho textu.



$$|\overline{F_1V_1}| + |\overline{F_2V_1}| = |\overline{F_1Z_1}| + |\overline{F_2Z_1}| = |\overline{F_1Z_2}| + |\overline{F_2Z_2}| = |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}|, \quad (2.1)$$

Obr. 2.1: Elipsa

Definujme si základné parametre elipsy, zobrazené na obr. 2.2.

Veľká poloos a = $|\overline{PS}| = |\overline{SA}|$. Polovica najdlhšej spojnice bodov elipsy, úsečky \overline{PA} .

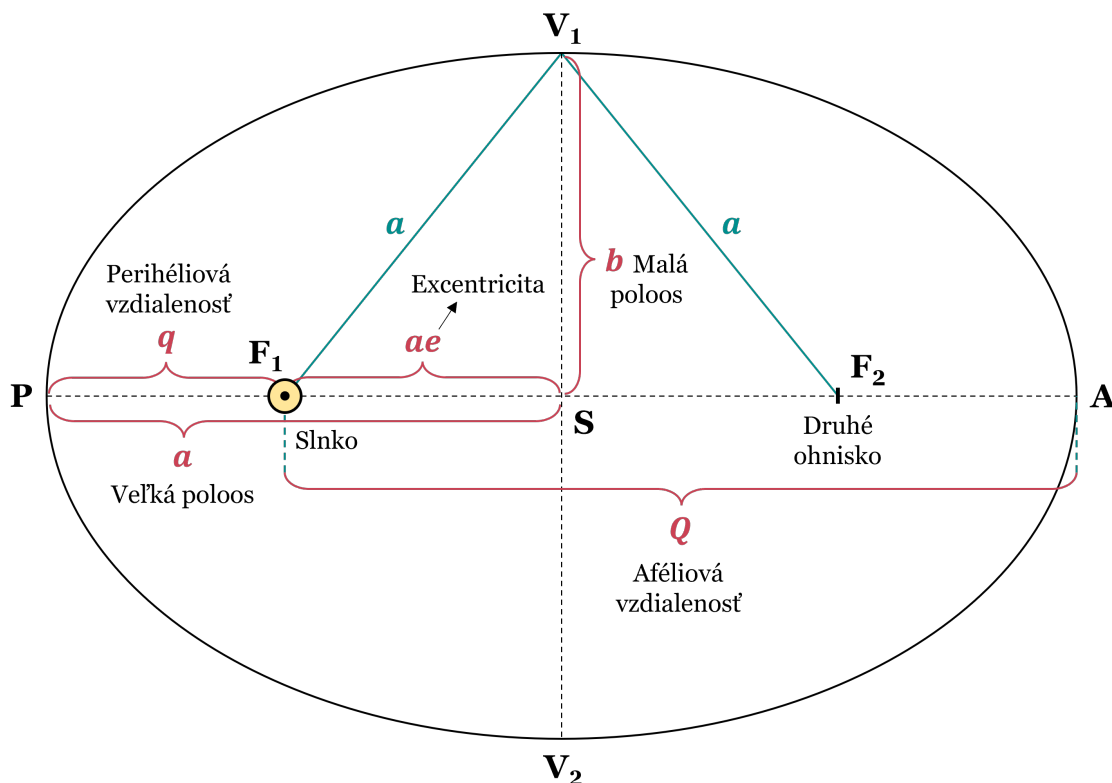
Malá poloos b = $|\overline{V_1S}| = |\overline{SV_2}|$. Polovica najkratšej spojnice bodov elipsy, úsečky $\overline{V_1V_2}$.

Perihéliová vzdialenosť q = $|\overline{PF_1}|$. Vzdialenosť medzi Slnkom a perihéliom¹.

Aféliová vzdialenosť Q = $|\overline{F_1A}|$. Vzdialenosť medzi Slnkom a aféliom².

Excentricita e určuje sploštenosť elipsy. Je to číslo medzi 0 a 1, ktoré hovorí o relatívnej polohe ohniska F_1 vrámci polpriamky \overline{SP} (respektíve ohniska F_2 vrámci polpriamky \overline{SA}). Matematicky zapísané: $|\overline{F_1S}| = ae$ (respektíve $|\overline{F_2S}| = ae$).

Nulová excentricita hovorí, že ohnisko F_1 je totožné so stredom S (a takisto s druhým ohniskom F_2). To znamená, že sa z elipsy stala kružnica (pre $e = 0$). Následne sa navyšovaním excentricity začne elipsa splošťovať, až dorazí ohnisko F_1 do bodu P (pre $e = 1$). Avšak na to aby bola splnená definičná vlastnosť elipsy (2.1), tak buď dostávame úsečku \overline{PA} , alebo musí byť elipsa nekonečne široká ($a = \infty$). Tento limitný prípad „roztrhnutej“ elipsy s excentricitou 1 voláme **parabola** a budeme sa jej podrobnejšie venovať v kapitole 12 o únikovej rýchlosti.



Obr. 2.2: Parametre elipsy

¹Všeobecne najbližší bod k ohnisku v ktorom sa nachádza centrálnе teleso označujeme **periapsida**. Špeciálne, ak je centrálnym telesom Zem, hovoríme o **perigeu**.

²Všeobecne najvzdialenejší bod k ohnisku v ktorom sa nachádza centrálnе teleso označujeme **apoapsida**. Špeciálne, ak je centrálnym telesom Zem, hovoríme o **apogeu**.

Možno ste si všimli, že na obr. 2.2 sú veľkosti úsečiek $\overline{F_1V_1}$ a $\overline{F_2V_1}$ označená ako veľká poloos a . Vysvetlime si, prečo to tak je a prečo je to užitočné. Vydíme z definície elipsy (2.1), z ktorej nechajme iba úplne ľavú a pravú stranu a prepíšme ju pomocou práve zadaných veličín:

$$|\overline{F_1V_1}| + |\overline{F_2V_1}| = q + Q.$$

Pozrime sa však čo predstavuje $q + Q$. Je to celá úsečka spájajúca perihélium a afélium \overline{PA} . Túto úsečku voláme hlavná os, alebo **priamka apsid**. Jej dĺžka je dvojnásobok veľkej poloosy,

$$|\overline{F_1V_1}| + |\overline{F_2V_1}| = 2a.$$

Zo symetrie vidíme, že $|\overline{F_1V_1}| = |\overline{F_2V_2}|$, takže $|\overline{F_1V_1}| = a = |\overline{F_2V_1}|$.

Na základe tejto znalosti vieme pomocou pravouhlého trojuholníka $\triangle F_1SV_1$ vypočítať dĺžku malej poloosy b . Z Pytagorovej vety

$$|\overline{F_1V_1}|^2 = |\overline{F_1S}|^2 + |\overline{SV_1}|^2 \Rightarrow a^2 = (ae)^2 + b^2$$

dostávame

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.2)$$

Na základe obr. 2.2 vieme takisto napísať vyjadrenia pre perihéliovú a aféliovú vzdialenosť

$$q = |\overline{PS}| - |\overline{F_1S}| = a - ae \Rightarrow \boxed{q = a(1 - e)}, \quad (2.3)$$

$$Q = |\overline{F_1S}| + |\overline{SA}| = a + ae \Rightarrow \boxed{Q = a(1 + e)}. \quad (2.4)$$

• • •

2. Keplerov zákon (o sprievodiči) (KZ-2)

Sprievodič planéty opíše za rovnaký čas rovnakú plochu.

Sprievodič je spojnica Slnka a planéty. Tento zákon hovorí o tom, že čím sa planéta nachádza ďalej od Slnka, tým pomalšie sa pohybuje. Graficky je znázornený na obr. 2.3. Plochy S_1, S_2, S_3 boli opísané sprievodičom za rovnaký čas (napr. 1 mesiac). Plochu celej elipsy vypočítame ako³

$$\boxed{S_{\odot} = \pi ab}. \quad (2.5)$$

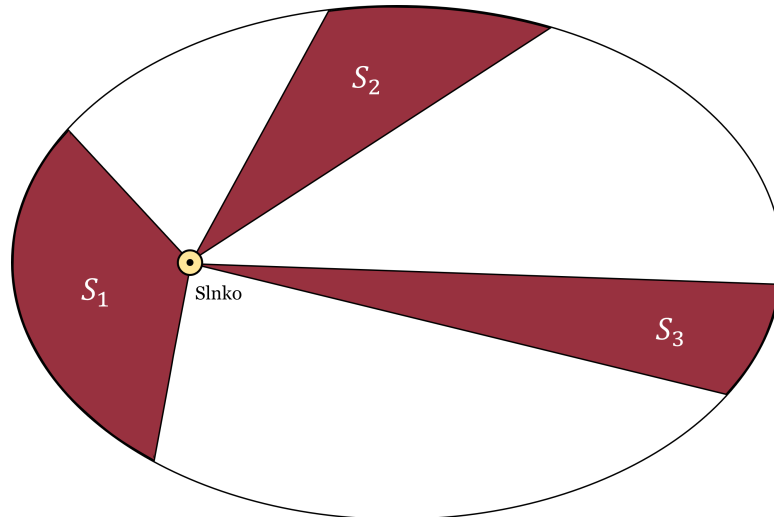
Plošná rýchlosť w je miera prírastku plochy za jednotku času. V našom kontexte to je plocha opísaná sprievodičom za 1 s. Druhý Keplerov zákon vieme naformulovať nasledovne: **Plošná rýchlosť sprievodiča je konštanta**⁴. To znamená, že w vieme spočítať z celého obehu planéty okolo Slnka ako podiel periódy obehu P a celkovej opísanej plochy S_{\odot} .

$$w = \frac{S_{\odot}}{P} = \frac{\pi ab}{P} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{P}, \quad (2.6)$$

kde sme využili vzorec na výpočet malej poloosy (2.2).

³Na druhú stranu, obvod elipsy je analyticky nespočítateľný.

⁴To je priamym dôsledkom zákona zachovania hybnosti, ktorému sa budeme venovať v kapitole 13.

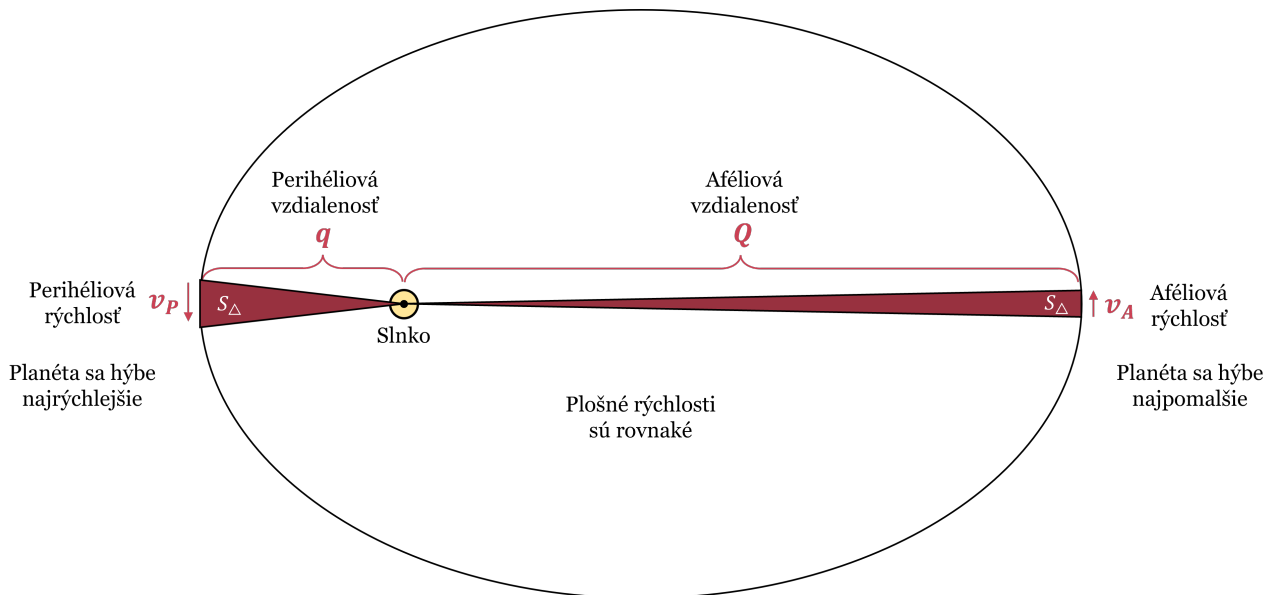


Obr. 2.3: Grafické znázornenie 2. Keplerovho zákona.

Platí: $S_1 = S_2 = S_3$.

• • •

Preskúmame na obr. 2.4 2. Keplerov zákon v blízkosti perihélia a afélia. Pohyb planéty tu je kolmý na sprievodič. Za krátky čas (1 s) sprievodič opíše úzky trojuholník s plochou S_{Δ} .



Obr. 2.4: Pohyb planéty v blízkosti perihélia a afélia

Planéta počas jednej sekundy prejde vzdialenosť $s = v \cdot 1 \text{ s}$. Plošná rýchlosť je prírastok plochy za 1 s. Touto plochou je trojuholník, ktorého obsah vyrátame ako polovicu zo súčiny základne a výšky. Základňa je dráha planéty s , a výška je dĺžka sprievodiča r . Teda

$$w = \frac{S_{\Delta}}{1 \text{ s}} = \frac{\frac{1}{2}sr}{1 \text{ s}} = \frac{\frac{1}{2}v \cdot 1 \text{ s} \cdot r}{1 \text{ s}} = \frac{1}{2}vr. \quad (2.7)$$

Dosadením perihélia P ($r = q$) a afélia A ($r = Q$) do (2.7) získavame dvojicu vzťahov

$$w_P = \frac{1}{2}v_P q \quad , \quad w_A = \frac{1}{2}v_A Q. \quad (2.8)$$

Avšak spomeňme si na 2. Keplerov zákon: Plošné rýchlosti sú konštantné! To znamená, že $w_P = w_A$ a po zjednotení vzťahov (2.8) máme

$$v_P q = v_A Q.$$

Dosadením (2.3) a (2.4) dostávame

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{Q}{q} = \frac{1+e}{1-e}. \quad (2.9)$$

Tento vzťah sa pamätá jednoducho tak, že vždy je v čitateli väčšia rýchlosť/vzdialenosť/a číslo väčšie ako 1, respektíve v menovateli je zas menšia rýchlosť/vzdialenosť/a číslo menšie ako 1.

• • •

3. Keplerov zákon (o perióde obehu) - jednoduchá verzia (KZ-3j)

Druhá mocnina periódy obehu planéty P v rokoch je rovná tretej mocnine veľkej poloosi jej dráhy a v astronomických jednotkách.

$$P^2 = a^3 \quad , \quad [P] = \text{rok}, [a] = \text{au} \quad (2.10)$$

Kepler zistil, že v Slnecnej sústave zostáva pomer tretej mocniny hlavnej poloosi a druhej mocniny obežnej doby konštantný.

$$\frac{a^3}{P^2} = \text{konštanta}. \quad (2.11)$$

Zvolením prirodzených jednotiek pre Zem, čo sú au (veľkosť veľkej poloosi zemskej dráhy a_{\oplus}) a roky (dĺžka obežnej periódy Zeme P_{\oplus}), dostávame tvar (2.10), keďže po dosadení a_{\oplus}, P_{\oplus} do (2.11) vychádza konštanta = 1. V nasledujúcej kapitole si ukážeme ako spočítať hodnotu tejto konštanty všeobecne pre ľubovoľnú sústavu.

• • •

Na záver zaujímavosť. Ak by ste si chceli narysovať elipsu, tak do papiera na podložke zapichnete 2 špendlíky (ako ohniská). Ďalej zaviažete nitku do kruhu, zoberte ceruzku a natiahnite nitku medzi špendlíky a ceruzku. Priložte ceruzku na papier a postupne ňou ťahajte čiaru, tak aby nitka ostávala celý čas napnutá. To zabezpečí rovnaký súčet vzdialeností ceruzky od špendlíkov. Vzdialenosť medzi špendlíkmi určuje excentricitu výslednej elipsy. Ak by sme špendlíky zapichli do rovnakého bodu, tak by vznikla kružnica (elipsa s excentricitou nula).

2.1 Príklady

2.1.1 Obeh Neptúna

Neptún obehne okolo Slnka za 165 rokov. Ako ďaleko od Slnka sa nachádza? Akou obehovou rýchlosťou sa pohybuje? Predpokladajte, že Neptún obieha po kruhovej dráhe.

2.1.2 Kométa z Oortovho oblaku

(IOAA 2011 - T01)

Väčšina neperiodických komét prichádza ku Slnku priamo z Oortovho oblaku. Určite ako dlho trvá kométe kým prejde túto cestu. Predpokladajte, že kométa začína 35 000 au od Slnka, kedy je v aféliu.

2.1.3 Planétka Hermes

(ZAVP - 80)

Planétka Hermes sa pohybuje okolo Slnka po dráhe s veľkou poloosou $a = 1,29$ au, a excentricitou $e = 0,475$. Určte:

- obežnú dobu P .
- perihéliovú vzdialenosť q , aféliovú vzdialenosť Q .
- dĺžku malej poloosi b .

2.1.4 Honda-Mrkos-Pajdušáková

(ZAVP - 76)

Obehová rýchlosť kométy Honda-Mrkos-Pajdušáková je v aféliu 10-krát menšia ako v perihéliu. Aká je excentricita jej dráhy?

2.1.5 Výsledky

Obeh Neptúna

Neptún je 30,1 au od Slnka a pohybuje sa rýchlosťou $1,15 \text{ au rok}^{-1} = 5,43 \text{ km s}^{-1}$.

Kométa z Oortovho oblaku

Kométe to bude trvať 1,2 milióna rokov.

Planétka Hermes

- $P \doteq 1,47$ rokov $\doteq 535$ dní
- $q \doteq 0,677$ au, $Q \doteq 1,90$ au
- $b \doteq 1,14$ au

Honda-Mrkos-Pajdušáková

Excentricita je 0,82.

Kapitola 3

Gravitácia

<https://youtu.be/PbBg9JOR35U>

Koncom 17.-teho storočia formuloval Isaac Newton svoju predstavu gravitácie:

Newtonov gravitačný zákon (NGZ)

Medzi každými dvoma hmotnými telesami pôsobí gravitačná sila \vec{F}_G , ktorá ich priťahuje k sebe. Jej veľkosť je rovnaká pre prvé aj druhé teleso a to konkrétne

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.1)$$

kde r je vzdialenosť medzi telesami, $m_{1,2}$ sú hmotnosti telies a $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ je gravitačná konštanta (ktorá škáluje silu do jednotiek SI).

Všimnime si, že pri výpočte gravitačnej sily vzorcom (3.1) delíme r^2 . To znamená, že **gravitačná sila klesá so štvorcem vzdialenosti**. Ak posunieme telesá od seba dvakrát ďalej, sila klesne štyrikrát. Ak trikrát ďalej, tak klesne deväťkrát, atď.. Pre $r \rightarrow \infty$ klesá F_G do nuly.

Pôsobenie ľubovoľnej sily F sa prejavuje urýchľovaním objektu zrýchlením \vec{a} podľa druhého Newtonovho zákona

$$\vec{F} = m \vec{a}. \quad (3.2)$$

To znamená, že ťažšie teleso sa urýchľuje menej. Napríklad, ak vyskočíte, tak Zem na vás, a vy na Zem pôsobíte rovnakou gravitačnou silou, avšak hmotnosť Zeme je oveľa vyššia ako vaša, čo znamená, že urýchľovanie Zeme ku vám je zanedbateľné. Preto ak máme sústavu zloženú z ťažkého telesa o hmotnosti M a ľahkého telesa o hmotnosti m , a platí $M \gg m$, tak môžeme uvažovať, že centrálné ťažké teleso sa nehýbe. Platí to pre sústavy ako Slnko – Zem, Zem – satelit, galaxia – hviezda, a podobne.

Gravitačná sila je slabá, pretože G je veľmi malé číslo. Na to aby boli pozorovateľné jej účinky, potrebujeme veľmi hmotné telesá ako planéty a hviezdy. Gravitačné pôsobenie bežných pozemských objektov navzájom na seba je zanedbateľné. Napríklad dvaja ľudia o hmotnosti $m = 80 \text{ kg}$ vo vzdialenosti $r = 1 \text{ m}$ sa priťahujú silou F_G približne¹ $4 \cdot 10^{-7} \text{ N}$. Využitím vzťahu (3.2) vieme spočítať zrýchlenie ktorým sa ku sebe pohybujú².

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G \frac{mm}{r^2}}{m} = G \frac{m}{r^2} \doteq 5 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2}, \text{ čo je vskutku zanedbateľné.}$$

¹Závisí to ešte aj na výzore.

²Pre rozšírenie, hmotnosť vo vzťahu (3.1) nazývame gravitačnou a hmotnosť vo vzťahu (3.2) nazývame zotrvačnou. Tieto dve hmotnosti si sú rovné, ak platí silný princíp ekvivalencie, ktorý sa zdá, že platí.

Podobne vieme spočítať gravitačné zrýchlenie a_G na povrchu (rovníku) Zeme. Zoberieme si testovacie teleso o arbitrárnej hmotnosti m , ktorá je zanedbateľná voči hmotnosti Zeme $M_\oplus = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg. Keďže sa teleso nachádza mimo Zeme, tak gravitácia Zeme je rovnaká ako gravitácia hmotného bodu s hmotnosťou Zeme umiestneného v strede Zeme. To je dôsledok **Gaussovho zákona**, ktorému sa budeme venovať v kapitole 23. Preto je vzdialenosť telesa od Zeme rovná (rovníkovému) polomeru Zeme³, $r = R_\oplus = 6378$ km.

$$a_G = \frac{F_G}{m} = \frac{G \frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2}}{m} = G \frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} \doteq 9,80 \text{ m s}^{-2}.$$

Zem však navyše rotuje okolo osi. To znamená, že na telesá na jej povrchu pôsobí zdanlivá **odstredivá sila** F_O , ktorú všeobecne spočítame ako

$$F_O = \frac{mv^2}{r}, \quad (3.3)$$

kde v je rýchlosť a r polomer krivosti. Polomer krivosti pre kruhovú dráhu je klasický polomer kruhu. Pre dráhu eliptickú to je zložitejšie, avšak v perihéliu a aféliu sú to priamo perihéliová vzdialenosť q a aféliová vzdialenosť Q .

Uvažujme, že Zem je guľa a testovacie teleso sa nachádza na rovníku. Potom $r = R_\oplus$, rýchlosť je podiel obvodu Zeme a času rotácie, $v = 2\pi R_\oplus / t_{\text{sid}}$, a odstredivé zrýchlenie má veľkosť

$$a_O = \frac{F_O}{m} = \frac{m(2\pi R_\oplus / t_{\text{sid}})^2}{R_\oplus m} = 4\pi^2 \frac{R_\oplus}{t_{\text{sid}}^2} \doteq 0,03 \text{ m s}^{-2}.$$

Výsledné zrýchlenie, ktoré pôsobí na teleso na povrchu (rovníku) Zeme je rovné rozdielu gravitačného a odstredivého. Nazývame ho **tiažové zrýchlenie** g .

$$g = a_G - a_O \doteq 9,77 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{na rovníku}).$$

3.1 3. Keplerov zákon podrobnejšie

Uvažujme systém, kde sa centrálna teleso o hmotnosti M nehýbe, a okolo neho obieha menšie teleso o hmotnosti m , platí $M \gg m$. Vzdialenosť telies bude konštantne rovná veľkej poloosi a , dráhu uvažujme ako kruhovú. Dôležité je si uvedomiť, čo by sme pociťovali, keby sme boli na menšom telese, napríklad na Zemi. Vnímame iba priťahovanie ku Zemi, nie je žiadny rozdiel gravitácie v noci a cez deň⁴. Ak by zrazu zmizla Zem a ocitli by sme sa sami na dráhe okolo Slnka, tak by sme boli v stave beztiaže. To znamená, že výslednica síl pôsobiacich na nás je nula, teda sa **vyrovná pôsobenie gravitačnej a odstredivej sily**,

$$F_G = F_O. \quad (3.4)$$

Tento vzťah platí iba na kruhovej dráhe. Na elipse nie, pretože sa urýchľujeme pozdĺž dráhy.

³Zem je sploštená, jej polárny polomer je 6357 km, a polomer je 6371 km.

⁴Úplne presne by to platilo, ak by Zem bola bodový objekt, ináč tam predsa len malé rozdiely sú.

Vzťah (3.4) je dôležitý poznatok z ktorého vydeme pri odvodení. Začneme dosadením (3.1) a (3.3), pričom $m_1 = M$, $m_2 = m$, $r = a$.

$$G \frac{Mm}{a^2} = \frac{mv^2}{a}.$$

Za rýchlosť dosadíme $v = 2\pi a/P$, kde P je perióda obehu, a upravíme

$$\begin{aligned} G \frac{Mm}{a^2} &= \frac{m(2\pi a/P)^2}{a}, \\ G \frac{M}{a^2} &= \frac{4\pi^2 a^2}{aP^2}, \\ \boxed{\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2}}, & \quad M \gg m. \end{aligned} \quad (3.5)$$

V (2.11) dostávame hodnotu konštanty rovnú $\frac{GM}{4\pi^2}$. Jej hodnota teda závisí na hmotnosti centrálného telesa. Napríklad pre Slnko o hmotnosti $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg dostávame konštantu rovnú približne $3 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Dá sa ukázať že tvar (3.5) **vyjde rovnako aj pre eliptickú dráhu** (čo je však nad rámec kurzu).

• • •

Spomeňme si teraz na to, ako sme v predchádzajúcej kapitole počítali pomer rýchlostí v perihéliu a aféliu (obr. 2.4) za pomoci malých trojuholníčkov. Čo ak by sme chceli spočítať konkrétne rýchlosti, nie len ich pomer? Ide to, ak spojíme vzťahy (2.8) a (2.6) (vďaka tomu, že w je konštanta, teda $w = w_P = w_A$). Pre perihélium dostávame

$$\frac{1}{2} v_P q = w_P = w = \frac{S_\odot}{P} = \frac{\pi ab}{P} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P}, \quad (3.6)$$

z čoho vyjadríme v_P , dosadíme q z (2.3) a skrátíme a

$$v_P = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{qP} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{a(1-e)P} = \frac{2\pi a \sqrt{1-e^2}}{(1-e)P}.$$

Rovnicu umocníme na druhú,

$$v_P^2 = \frac{4\pi^2 a^2 (1-e^2)}{(1-e)^2 P^2}.$$

Úpravou $1-e^2 = (1-e)(1+e)$ a krátením dostávame

$$v_P^2 = \frac{4\pi^2 a^2 (1-e)(1+e)}{(1-e)(1-e)P^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}. \quad (3.7)$$

Teraz použijeme novú odvodenú formu 3. Keplerovho zákona (3.5) a dosadíme

$$\frac{1}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2 a^3},$$

čo nám po dosadení do (3.7) dá

$$v_P^2 = 4\pi^2 a^2 \frac{GM}{4\pi^2 a^3} \cdot \frac{1+e}{1-e}.$$

Nakoniec po finálnej úprave

$$v_P^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}. \quad (3.8)$$

Analogickým odvodením, alebo aplikovaním (2.9) na (3.8) dostávame vzťah pre afélium

$$v_A^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}. \quad (3.9)$$

Pre Zem a Slnko ($e = 0,0167$) vychádza $v_P = 30,3 \text{ km s}^{-1}$ a $v_A = 29,3 \text{ km s}^{-1}$.

Vidíme, že vzťahy (3.8) a (3.9) sú podobné. Zopár šikovnými úpravami ich vieme prepísať do takmer identického tvaru:

$$v_P^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e} = GM \frac{1+e}{q} = GM \frac{2-(1-e)}{q} = GM \left(\frac{2}{q} - \frac{1-e}{q} \right) = GM \left(\frac{2}{q} - \frac{1}{a} \right),$$

$$v_A^2 = \frac{GM}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e} = GM \frac{1-e}{Q} = GM \frac{2-(1+e)}{Q} = GM \left(\frac{2}{Q} - \frac{1+e}{Q} \right) = GM \left(\frac{2}{Q} - \frac{1}{a} \right).$$

Jediný rozdiel je v tom či je v zátvorke pod zlomkovou čiarou q alebo Q . Avšak to je aktuálna vzdialenosť pre danú rýchlosť! Pri výpočte rýchlosti v perihéliu v_P sa nám vo finálnom vzorčeku objaví perihéliová vzdialenosť q a pre výpočet v_A sa zas objaví vzdialenosť Q ! Je možné ukázať, že toto sa dá zobecniť pre ľubovoľné miesto na eliptickej dráhe a vo vzorčeku sa vyskytne aktuálna vzdialenosť r od centrálného telesa.

Vis-viva (Vv)

Obiehajúce teleso zanedbateľnej hmotnosti m voči centrálnemu telesu o hmotnosti M sa pohybuje po eliptickej dráhe s veľkou poloosou a tak, že vo vzdialenosti r od centrálného telesa má rýchlosť v splňujúcu vzťah

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad M \gg m, \quad (3.10)$$

Vis-viva je veľmi silný nástroj pri výpočte príkladov a ešte ju určite využijeme.

3.2 Príklady

3.2.1 Gravitačná konštanta a zrýchlenie

(ZAVP - 117)

Určte hodnotu gravitačnej konštanty G v jednotkách SI. Hmotnosť Zeme je $M_\oplus = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, jej (priemerný) polomer $R_\oplus = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ a gravitačné zrýchlenie na povrchu $a_G = 9,80 \text{ m s}^{-2}$.

3.2.2 Váha na Jupiteri

Koľko by ukázala váha kalibrovaná na Zemi, ak by sa na Jupiteri na ňu postavil človek o hmotnosti $m = 80 \text{ kg}$? Jupiter sa otočí okolo osi za dobu $T_J = 9 \text{ h } 50 \text{ min}$, jeho polomer je $R_J = 6,99 \cdot 10^7 \text{ m}$ a hmotnosť $M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$. Tiažové zrýchlenie na Zemi je $g = 9,77 \text{ m s}^{-2}$.

3.2.3 1. kozmická rýchlosť

(ZAVP - 118)

Vypočítajte prvú kozmickú rýchlosť, čo je rýchlosť ktorou sa musí pohybovať umelá družica Zeme, aby obiehala na kruhovej dráhe tesne nad povrchom Zeme (na rovníku). Určte obežnú dobu družice. Rovníkový polomer Zeme je $R_{\oplus} = 6378 \text{ km}$ a jej hmotnosť $M_{\oplus} = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

3.2.4 Honda-Mrkos-Pajdušáková sa vracia

Kométa Honda-Mrkos-Pajdušáková obieha okolo Slnka po dráhe s veľkou poloosou $a = 3,0 \text{ au}$ a excentricitou $e = 0,82$. Vypočítajte jej rýchlosť v perihéliu v_P a aféliu v_A . Overte platnosť vzťahu

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{1 + e}{1 - e}.$$

3.2.5 Výsledky

Gravitačná konštanta a zrýchlenie

$$G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Váha na Jupiteri

Váha by ukázala 194 kg.

1. kozmická rýchlosť

Prvá kozmická rýchlosť je $7,906 \text{ km s}^{-1}$.

Honda-Mrkos-Pajdušáková sa vracia

$$v_P \doteq 55 \text{ km s}^{-1}, \quad v_A \doteq 5,4 \text{ km/s}.$$

Vzťah overíme dosadením do ľavej (L) a pravej (P) strany:

$$\begin{aligned} L &= \frac{v_P}{v_A} \doteq 10, \\ P &= \frac{1 + e}{1 - e} \doteq 10, \end{aligned}$$

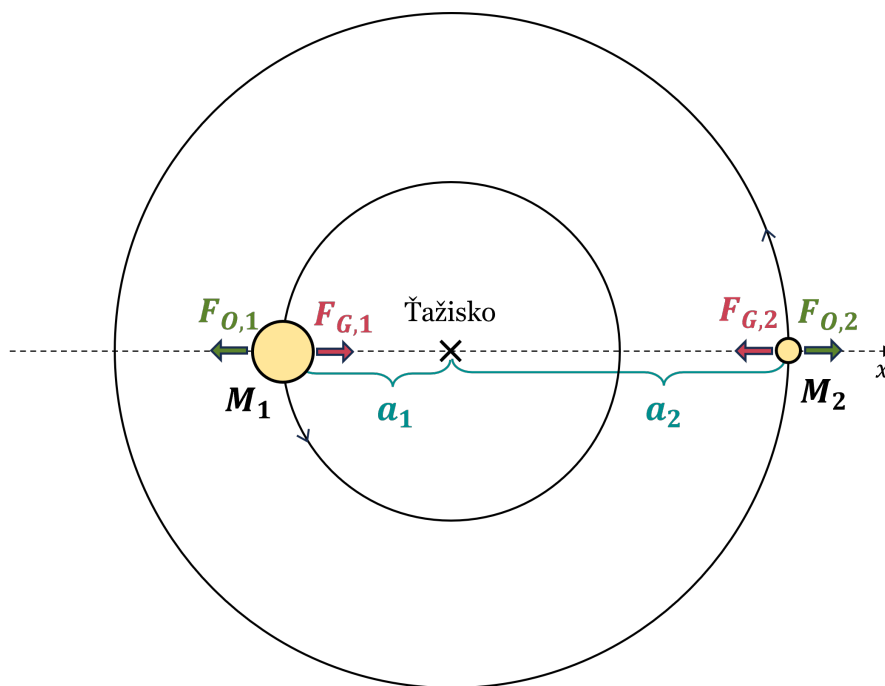
teda $L = P$, čo potvrdzuje platnosť vzťahu pre pomer rýchlosti v perihéliu a aféliu.

Kapitola 4

Dvojhviezda

<https://youtu.be/BGAJXkJYiAw>

Doteraz sme počítali v aproximácii $M \gg m$, kedy je centrálné teleso nehybné. Ak sú však hmotnosti telies rádovo podobné, musíme uvažovať realistickejší prípad, kedy obe obiehajú telesá okolo spoločného **ťažiska**¹ medzi nimi. Pre jednoduchosť predpokladajme kruhové dráhy. Situácia je zobrazená na obr. 4.1.



Obr. 4.1: Schéma obehu dvojhviezdy

Poloha ťažiska \vec{r}_T , pre n hmotných bodov o hmotnostiach m_1, \dots, m_n , je definovaná ako priemer polôh bodov $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ vážený podľa hmotností

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (4.1)$$

V jednorozmernom prípade (v súradnici x) pre 2 hviezdy² o hmotnosti M_1 a M_2 dostávame

$$x_T = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}. \quad (4.2)$$

¹V astronómii často používame označenie **barycentrum**.

²Keďže ide o sféricky symetrické objekty, môžeme ich nahradiť hmotnými bodmi v ich strede.

Ak sa presunieme do sústavy, ktorá má počiatok v ťažisku (takzvaná ťažisková sústava), tak na základe obr. 4.1 vidíme, že

$$x_T = 0 \quad , \quad x_1 = -a_1 \quad , \quad x_2 = a_2 \quad ,$$

kde a_1, a_2 sú veľké poloosy (polomery) dráh zložiek dvojhviezdy. Dosadením do (4.2)

$$0 = \frac{-M_1 a_1 + M_2 a_2}{M_1 + M_2}$$

a úpravou dostávame dôležitý vzťah

$$\boxed{M_1 a_1 = M_2 a_2} \quad , \quad (4.3)$$

ktorý zvyknem nazývať *hojdačka*³. Dá sa ukázať, že to **platí rovnako aj pre eliptické dráhy**, čo je však nad rámec tohto kurzu.

Prečo však hviezdy obiehajú práve okolo ťažiska? Dôležité je si pripomenúť Newtonov gravitačný zákon (NGZ), ktorý hovorí, že na obe hviezdy pôsobí rovnaká gravitačná sila ($F_{G,1} = F_{G,2}$). Zároveň sú obe na kruhových dráhach (schéma na obr. 4.1), čo znamená, že platí rovnosť gravitačnej a odstredivej sily pre obe hviezdy ($F_{G,1} = F_{O,1}$; $F_{G,2} = F_{O,2}$). Z toho však vyplýva že platí rovnosť odstredivej sily pôsobiacej na hviezdu 1 (vľavo) a na hviezdu 2 (vpravo)

$$F_{O,1} = F_{O,2} \quad .$$

Dosadením vzťahu pre odstredivú silu (3.3) dostávame

$$\frac{M_1 v_1^2}{a_1} = \frac{M_2 v_2^2}{a_2} \quad . \quad (4.4)$$

Rýchlosť hviezdy spočítame ako podiel dĺžky jej dráhy (obvod kruhu) a periódy obehu P_1, P_2 ,

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P_1} \quad , \quad v_2 = \frac{2\pi a_2}{P_2} \quad .$$

Rýchlosti dosadíme do (4.4), uvedomíme si, že $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$, a periódu označíme jednotne P .

$$\frac{M_1 (2\pi a_1 / P)^2}{a_1} = \frac{M_2 (2\pi a_2 / P)^2}{a_2} \quad ,$$

čo po umocnení zátvoriek a krátení

$$\frac{M_1 \cdot 4\pi^2 a_1^2}{a_1 P^2} = \frac{M_2 \cdot 4\pi^2 a_2^2}{a_2 P^2} \quad \Rightarrow \quad M_1 a_1 = M_2 a_2$$

dáva práve vzťah (4.3) vychádzajúci z definície ťažiska.

³Je to preto, lebo členy $M_1 a_1$ a $M_2 a_2$ predstavujú momenty síl, ktoré preklápujú hojdačku protichodnými smermi. Ak sú rovnaké, hojdačka je v rovnováhe. Preto si musí rodič sadnúť bližšie ku stredu, aby sa mohol hojdať s dieťaťom. Rovnako to funguje s hviezdami. Tá ťažšia „sedí“ bližšie ku ťažisku a ľahšia ďalej.

4.1 A opäť 3. Keplerov zákon

Napíšme si rovnosti gravitačných a odstredivých síl pre obe hviezdy v sústave na obr. 4.1

$$F_{G,1} = F_{O,1} \quad , \quad F_{G,2} = F_{O,2} .$$

Po dosadení (3.1) a (3.3) (vzdialenosť hviezd je $r = a_1 + a_2$)

$$G \frac{M_1 M_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{M_1 v_1^2}{a_1} \quad , \quad G \frac{M_1 M_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{M_2 v_2^2}{a_2} .$$

Za rýchlosti dosadíme analogicky ako predtým

$$G \frac{M_1 M_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{M_1 (2\pi a_1 / P)^2}{a_1} \quad , \quad G \frac{M_1 M_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{M_2 (2\pi a_2 / P)^2}{a_2} .$$

Po úprave

$$G \frac{M_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_1}{P^2} \quad , \quad G \frac{M_1}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_2}{P^2} .$$

Teraz tieto 2 rovnice sčítame dokopy (teda ľavú stranu s ľavou a pravú s pravou, aby sme dostali jednu rovnicu) a upravíme

$$G \frac{M_2}{(a_1 + a_2)^2} + G \frac{M_1}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{4\pi^2 a_1}{P^2} + \frac{4\pi^2 a_2}{P^2} ,$$

$$G \frac{M_1 + M_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{4\pi^2}{P^2} (a_1 + a_2) ,$$

$$\boxed{\frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2) = \frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2}} ,$$

čím sme odvodili plnú formu 3. Keplerovho zákona! Opäť, vzťah **platí aj pre eliptické dráhy**.

3. Keplerov zákon (o perióde obehu) - plná verzia (KZ-3p)

V sústave dvoch gravitačne viazaných telies platí

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2) , \quad (4.5)$$

kde a_1, a_2 sú veľké poloosy dráh, M_1, M_2 hmotnosti zložiek a P spoločná perióda obehu.

Výraz $G(M_1 + M_2)$ voláme **štandardný gravitačný parameter**. Takisto ho dáva zmysel definovať pre jedno teleso (GM), ak vyšetrujeme obchod druhého telesa so zanedbateľnou hmotnosťou. Zavádzame ho z praktického dôvodu, pretože z pozorovaní nevieme merať priamo hmotnosti a G , ale meriame práve tento parameter. Preto ho poznáme s vyššou presnosťou. Napríklad gravitačný parameter Slnka je

$$GM_{\odot} = 1,327\,124\,400\,42 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} ,$$

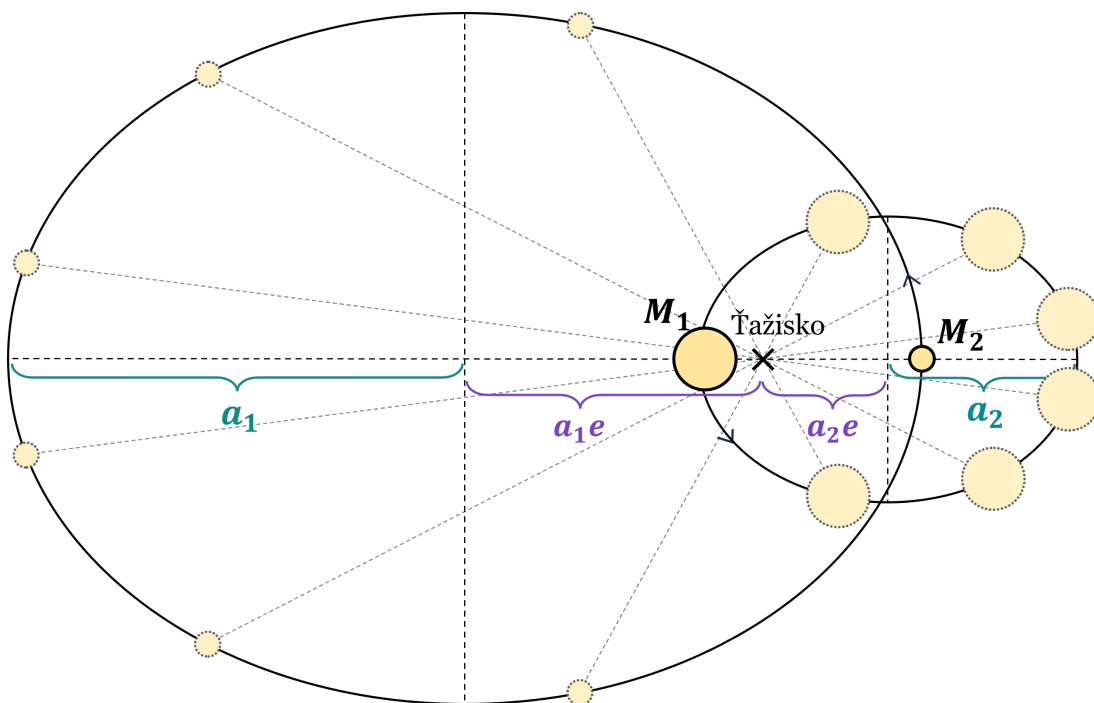
pričom jeho hmotnosť vieme s presnosťou o 7 rádov menšou!

4.2 Eliptické dráhy

Vo všeobecnom prípade hviezdy okolo seba obiehajú po eliptických dráhach s veľkými poloosami a_1, a_2 a **rovnakou excentricitou**. To vyplýva zo symetrie obbehov, ktorá je znázornená na schéme 4.2. Spojnica hviezd vždy prechádza ťažiskom, ktoré ostáva nehybne ohniskom pre obe elipsy. Pomer vzdialeností ku hviezdám od ťažiska (r_1, r_2) sa musí zachovať, kvôli hojdačke

$$M_1 r_1 = M_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_1}{M_2}.$$

To znamená, že obe elipsy majú rovnaký tvar len sú naškálované na inú veľkosť pomocou dĺžky veľkej poloosi. Keďže však tvar (sploštenosť) elipsy popisuje excentricita e , a tvar sa zachováva, tak obe dráhy musia mať rovnaké e .

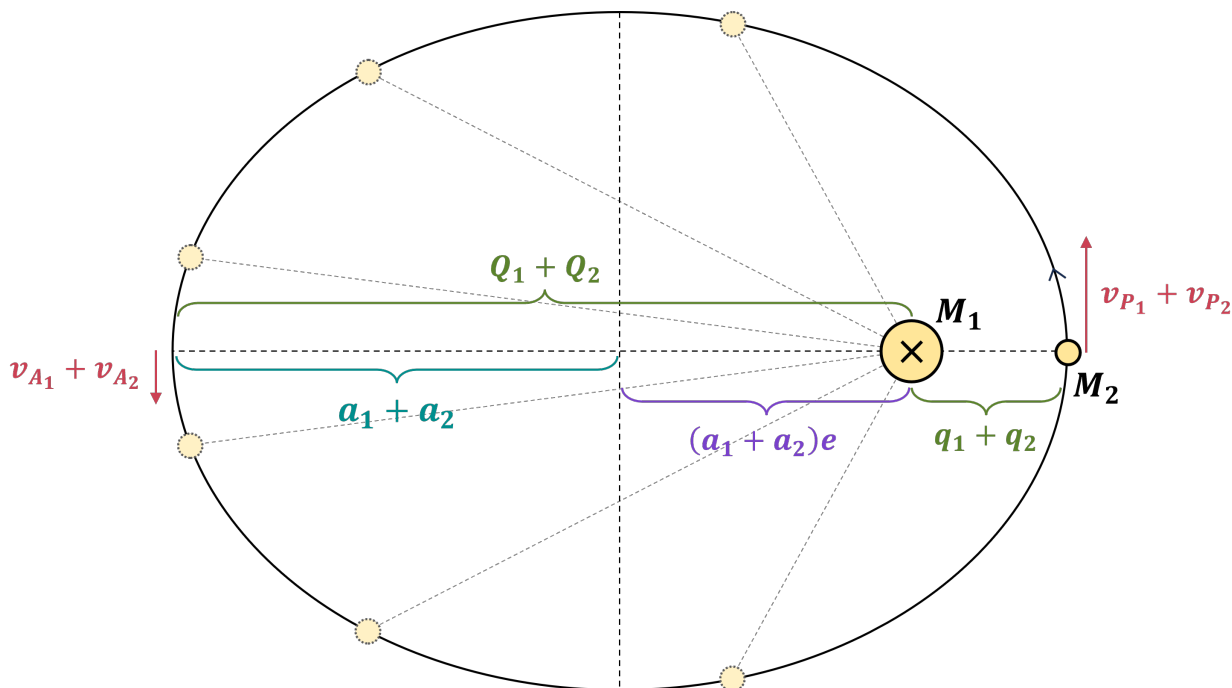


Obr. 4.2: Eliptické dráhy dvojhviezdy

Ak by sme boli na ťažšej hviezde, ktorá je bližšie ku ťažisku, javilo by sa nám, že menšia hviezda okolo nás obieha po eliptickej dráhe s opäť rovnakou excentricitou e a veľkou poloosou rovnou súčtu veľkých poloosí $a_1 + a_2$. Túto dráhu voláme **relatívna dráha**.

Situácia je zobrazená na obr. 4.3. Zároveň tam sú vyznačené relatívne **apsidy**. Periapsida je bod najväčšieho priblíženia, označená ako $q_1 + q_2$ (súčet periapsíd v ťažiskovej sústave na obr. 4.2). Apoapsida je bod najväčšieho oddialenia, označená ako $Q_1 + Q_2$ (súčet apoapsíd v ťažiskovej sústave na obr. 4.2).

V apsidách je relatívna rýchlosť rovná súčtu rýchlostí hviezd, čo je takisto znázornené na obr. 4.3. Mimo apsid, je situácia zložitejšia, pretože vektory rýchlostí nie sú protichodné, ale zvierajú obecný uhol. Avšak ukážeme si, že platí obdoba veľmi užitočnej rovnice Vis-Viva (Vv) aj pre dvojhviezdny systém.



Obr. 4.3: Relatívna dráha dvojhviezdy

• • •

Periódou obehu dvojhviezdy popisuje plná verzia 3. Keplerového zákona (KZ-3p), ktorý si aj mierne predpripravíme na neskorší krok

$$\frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}. \quad (4.6)$$

Spomeňme si na „odvodenie“ Vis-vivy v predchádzajúcej kapitole, ktoré začalo ešte v kapitole 2. Celé to bolo založené na malinkých trojuholníkoch s rovnakými plochami na obr. 2.9. Avšak to sa dá aplikovať aj tu! **Relatívny obeh hviezd** (obr. 4.3) **spĺňa 2. Keplerov zákon!** To znamená, že platí rovnica (3.7) pre rýchlosť v periapside

$$v_P^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e},$$

kde v našom prípade dosadíme $a = a_1 + a_2$

$$v_P^2 = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}.$$

Teraz dosadíme predpripravenú verziu 3. Keplerovho zákona (4.6)

$$v_P^2 = 4\pi^2 (a_1 + a_2)^2 \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2 (a_1 + a_2)^3} \cdot \frac{1+e}{1-e} = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1+e}{1-e}.$$

Analogický výpočet sa dá spraviť pre apoapsidu, takže

$$\boxed{v_P^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1+e}{1-e}, \quad v_A^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_1 + a_2} \cdot \frac{1-e}{1+e}}, \quad (4.7)$$

čo je veľmi podobné rovniciam (3.8) a (3.9). Podobnou sériou úprav ako v minulej kapitole vieme tieto rovnice previesť do tvaru

$$v_{\text{P}}^2 = G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{q_1 + q_2} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right),$$

$$v_{\text{A}}^2 = G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{Q_1 + Q_2} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right).$$

Opäť vidíme, že tvary rovníc sú extrémne podobné. Pri výpočte relatívnej rýchlosti v periapside dostávame napravo v menovateli súčet periapsidových vzdialeností, a obdobne v druhej rovnici pre apoapsidum. Dá sa ukázať, že to platí pre obecnú *relatívnu* vzdialenosť $r = r_1 + r_2$ a *relatívnu* rýchlosť v .

$$v^2 = G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right), \quad (4.8)$$

čo je obdoba rovnice Vis-viva (Vv) pre dvojhviezdu.

• • •

Vydelíme rovnice v (4.7), získame

$$\frac{v_{\text{P}}^2}{v_{\text{A}}^2} = \frac{\frac{G(M_1+M_2)}{a_1+a_2} \cdot \frac{1+e}{1-e}}{\frac{G(M_1+M_2)}{a_1+a_2} \cdot \frac{1-e}{1+e}} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}.$$

Z toho vidíme, že opäť ako predtým v (2.9), tak aj pre dvojhviezdu platí

$$\frac{v_{\text{P}}}{v_{\text{A}}} = \frac{1+e}{1-e}. \quad (4.9)$$

• • •

2. Keplerov zákon platí nie len na relatívnej dráhe, ale aj na jednotlivých absolútnych dráhach oboch zložiek. Tie sú znázornené na obr. 4.2. Opäť vieme využiť rovnicu (3.7), a tentoraz si ju napísať pre obe zložky (všade hodíme index 1 alebo 2)

$$v_{\text{P}_1}^2 = \frac{4\pi^2 a_1^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}, \quad v_{\text{P}_2}^2 = \frac{4\pi^2 a_2^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}.$$

Dôležité je, že excentricita a perióda je rovnaká pre obe dráhy, čo je označené jednotne e a P . Delením týchto rovníc a využitím hojdačky (4.3) dostaneme

$$\frac{v_{\text{P}_1}^2}{v_{\text{P}_2}^2} = \frac{\frac{4\pi^2 a_1^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}}{\frac{4\pi^2 a_2^2}{P^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2}$$

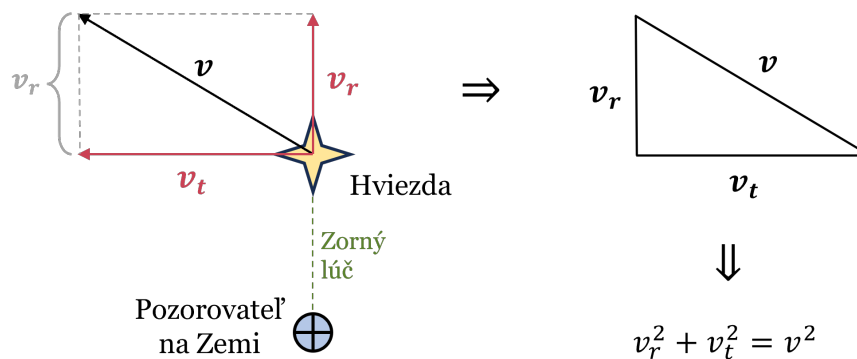
Odmocnením a spravením rovnakých krokov pre apoapsidu získavame finálny vzťah

$$\frac{v_{\text{P}_1}}{v_{\text{P}_2}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{v_{\text{A}_1}}{v_{\text{A}_2}}.$$

4.3 Radiálna a tangenciálna rýchlosť

Zorný lúč je spojnicou našich očí a pozorovaného objektu. Rýchlosť meraní v tomto smere voláme **radiálna rýchlosť** v_r . Ak sa objekt pohybuje preč od nás, tak $v_r > 0$, ak sa zase pohybuje smerom ku nám, tak $v_r < 0$. Zložka rýchlosti meraná v rovine kolmej na zorný lúč sa nazýva **tangenciálna rýchlosť** v_t . Situácia je zobrazená na obr. 4.4. Keďže v_r je kolmé na v_t , tak pre celkovú rýchlosť v platí Pytagorova veta.

$$\boxed{v^2 = v_r^2 + v_t^2}. \quad (4.10)$$



Obr. 4.4: Radiálna a tangenciálna rýchlosť

Inklinácia i je sklon dráhy voči referenčnej rovine. Pri pozorovaní dvojhviezd a exoplanét je konvenciou referenčná rovina kolmá na zorný lúč. Teda ak je $i = 0^\circ$, tak pozorujeme sústavu zhora, respektíve zdola, a vidíme pohyb iba v tangenciálnom smere. Ak je $i = 90^\circ$, tak sústavu pozorujeme z boku, a pohyb vidíme iba v radiálnom smere.

Teda, $v_r = 0$ pre $i = 0^\circ$, a $v_r = v$ pre $i = 90^\circ$. Funkcia, ktorá je nulová pre 0° a jednotková v 90° je *sínus*. To znamená⁴, že radiálna rýchlosť je voči celkovej škálovaná so sínusom inklinácie

$$\boxed{v_r = v \sin i}. \quad (4.11)$$

Pre tangenciálnu rýchlosť to je opačne, $v_t = v$ pre $i = 0^\circ$, a $v_t = 0$ pre $i = 90^\circ$. Tomu odpovedá funkcia *kosínus*, teda tangenciálna rýchlosť je voči celkovej škálovaná s kosínusom inklinácie

$$\boxed{v_t = v \cos i}. \quad (4.12)$$

• • •

V kontexte Slnecnej sústavy považujeme za referenčnú rovinu rovinu obehu Zeme. Planéty majú inklinácie blízke nule. V kontexte blízkozemského prostredia považujeme za referenčnú rovinu zemský rovník. Napríklad satelity na polárnom orbite majú $i = 90^\circ$.

⁴Dá sa to ukázať aj rigoróznejšie, a to z pravouhlého trojuholníka na obr. 4.4. Potom uhol medzi stranou v_t a v bude i . Z definície sínusu dostávame uvedené vzťahy.

4.4 Príklady

4.4.1 Zem a Mesiac

Zem a Mesiac obiehajú okolo spoločného bodu (ťažiska), uvažujeme kruhové dráhy. Je tento bod mimo Zeme? Ako vysoko nad, respektíve ako hlboko pod povrchom Zeme sa nachádza? Hmotnosť Zeme je $M_{\oplus} = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg, hmotnosť Mesiaca je $M_{\zeta} = 7,438 \cdot 10^{22}$ kg a vzdialenosť stredu Mesiaca od stredu Zeme (takzvaná *lunar distance*) je $d = 384\,400$ km a polomer Zeme je $R_{\oplus} = 6378$ km.

4.4.2 Alpha Centauri

Alpha Centauri je trojhviezdny systém. V jeho strede obiehajú okolo seba Alpha Centauri A a Alpha Centauri B s periódou $P = 79$ rokov. Ich hmotnosti sú $M_A = 1,1 M_{\odot}$ a $M_B = 0,9 M_{\odot}$, kde M_{\odot} je hmotnosť Slnka. Okolo nich obieha tretia hviezda, Proxima Centauri (zložka C), ktorej hmotnosť je $M_C = 0,12 M_{\odot}$. Pri pohľade z ťažiska zložiek A a B sa javí, že C obieha na dráhe s veľkou poloosou $a_{C+AB} = 8700$ au. Využite, že $a_{C,AB} \gg a_A, a_B$.

Úlohy:

- Aká je priemerná vzdialenosť zložiek A a B, teda veľká poloos $a_{A,B}$ ich relatívnej dráhy?
- Aké sú veľké poloosy jednotlivých dráh zložiek A a B?
- Ako dlho trvá obeh Proxime Centauri okolo centra dvojhviezdy?

Hint: Tento trojhviezdny systém sa dá rozložiť na 2 dvojjložkové systémy (A s B, a A+B s C).

4.4.3 Dvojhviezdny systém

(AO 2017 SŠ DK - 4)

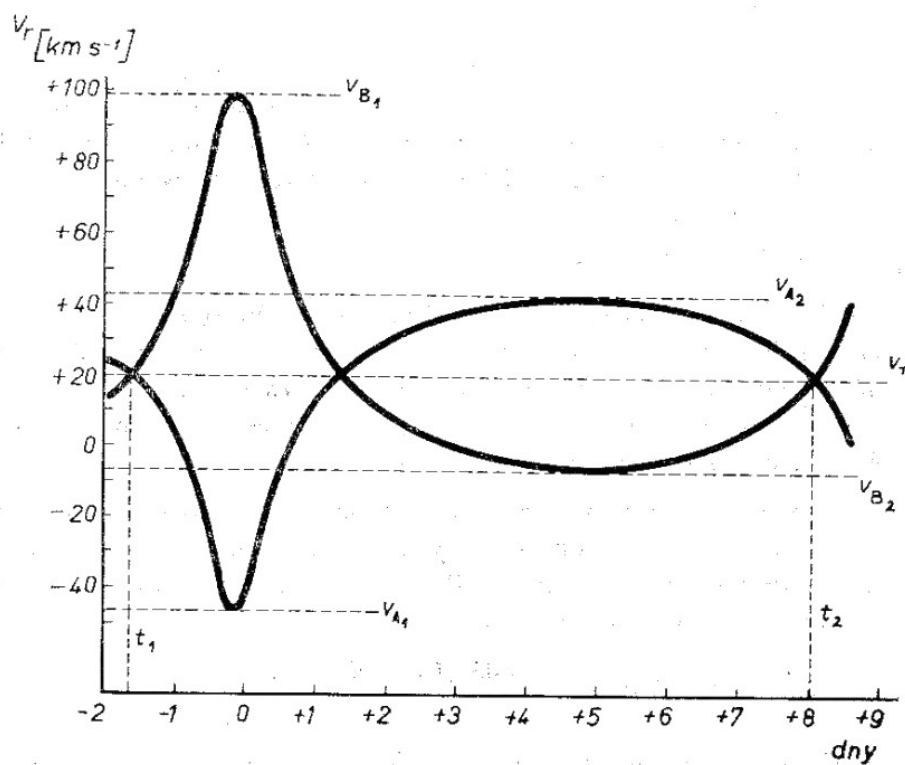
Vzdialenosť dvojhviezdy je 10 pc, najväčšia uhlová separácia zložiek je $7,0''$ a najmenšia je $1,0''$. Predpokladajme, že orbitálna perióda je 100 rokov a orbitálna rovina je kolmá k zornému líču. Ak hlavná polos dráhy jednej zložky je rovná $a_1 = 3,0''$, určte hmotnosti oboch zložiek v jednotkách hmotnosti Slnka.

4.4.4 Radiálne rýchlosti

(ZAVP - 247)

Na obr. 4.5 je znázornený priebeh radiálnych rýchlostí (v smere zorného lúča) zložiek (A, B) dvojhviezdy ρ Velorum. Predpokladajte, že zorný lúč leží v rovine obehu sústavy ($i = 90^\circ$, teda ich pozorujeme „zboku“). Určte:

- obežnú dobu P ,
- radiálnu rýchlosť ťažiska sústavy v_T ,
- orientáciu eliptických dráh vzhľadom na zorný lúč,
- excentricitu relatívnej dráhy a
- hmotnosti zložiek dvojhviezdy.



Obr. 4.5: Graf radiálnych rýchlostí zložiek dvojhviezdy ρ Velorum

4.4.5 Výsledky

Zem a Mesiac

Bod okolo ktorého obiehajú sa nachádza vnútri Zeme, konkrétne 1597 km pod povrchom.

Alpha Centauri

- (a) $a_{A,B} \doteq 23 \text{ au}$.
- (b) $a_A \doteq 10 \text{ au}$, $a_B \doteq 13 \text{ au}$.
- (c) Obeh trvá $P_C \doteq 560\,000$ rokov.

Dvojhviezdny systém

Hmotnosti hviezd sú $1,6 M_\odot$ a $4,8 M_\odot$.

Krivka radiálnych rýchlostí

- (a) $P \doteq 9,7$ dní.
- (b) $v_T \doteq 20 \text{ km s}^{-1}$.
- (c) Okolia miním a maxím krivky sú symetrické. To znamená, že priamka apsid je kolmá na zorný lúč.
- (d) Na základe pomeru rýchlostí v perihéliu a aféliu získavame $e \doteq 0,5$.
- (e) Na základe tretieho Keplerovho zákona a pomeru rýchlostí zložiek dvojhviezdy dostávame $M_A \doteq 0,33 M_\odot$, $M_B \doteq 0,27 M_\odot$.

Kapitola 5

Pogsonova rovnica

<https://youtu.be/LfIABNLh-Oo>

Prejdime k odvetviu astrofyziky, ktoré nazývame **fotometria**. Budeme sa zaoberať skúmaním svetla vo viditeľnej oblasti, meraním jasnosti, a veličinami s tým spojenými. Klaudios Ptolemaios vydal katalóg nebeských telies (hlavne hviezd), kde boli objekty rozdelené do 6 kategórií podľa jasnosti. Určoval ich podľa toho, ktoré hviezdy sa zjavili večer ako prvé (kategória 1), až po tie čo sa zjavili posledné (kategória 6). Teda, čím nižšia kategória, tým jasnejšia hviezda.

Tieto kategórie jasností hviezd nazývame **hviezdne veľkosti**. Toto označenie môže byť mierne mätúce, keďže hviezdna veľkosť nemá nič spoločné s reálnou veľkosťou hviezdy. Preto budeme používať alternatívne pomenovanie: **magnitúda**, namiesto hviezdna veľkosť¹.

Zdanlivá magnitúda m je veličina popisujúca jasnosť hviezdy, podľa toho ako ju vníma naše oko. Podľa definície Normana Roberta Pogsona z roku 1856 platí, že **hviezda s magnitúdou o 5 menšou je 100-krát jasnejšia**. Čo však znamená, že je 100-krát jasnejšia?

Zdanlivý (svetelný) tok Φ je množstvo svetelnej energie², ktoré prejde 1 m^2 za 1 s , ak prihliadneme na citlivosť oka pre rôzne vlnové dĺžky³. Jednotkou je teda $\text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1} = \text{W m}^{-2}$. Zdanlivý (svetelný) tok popisuje jasnosti objektov (hviezd), tak ako ich vníma naše oko. Ak teda hovoríme, že hviezda 1 je 100-krát jasnejšia ako hviezda 2, tak to znamená, že pomer ich tokov je 100, matematicky zapísané: $\Phi_1/\Phi_2 = 100$.

Pogsonova rovnica (POG)

Relatívnu jasnosť hviezd v magnitúdach m_1, m_2 určiť na základe pomeru ich zdanlivých (svetelných) tokov Φ_1, Φ_2 ako

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right),$$

kde \log je dekadický logaritmus^a.

^aPri výpočte $\log x$ sa pýtame na koľkú máme umocniť 10, aby sme dostali x .
Teda $\log(100) = 2$ a $\log(1000) = 3$

¹Avšak je to mierne problematické, pretože jednotkou hviezdnej veľkosti je takisto magnitúda, čo bude viesť ku vetám ako: „Magnitúda hviezdy je 5 magnitúd“, ale snád' to bude zrozumiteľné.

²Súčet energie fotónov, respektíve energia elektromagnetických kmitov.

³Tyčinky v oku, ktoré používame pri slabých svetelných podmienkach, sú najcitlivejšie v strede viditeľného svetla (zelená farba). Na okrajoch, pre červenú a fialovú farbu, je citlivosť najnižšia.

Platnosť rovnice (POG) si môžeme overiť z východzieho princípu: hviezda 1 s magnitúdou o 5 menšou ako hviezda 2 je 100-krát jasnejšia. Teda $m_1 - m_2 = -5$ (znamienko mínus vzniklo z toho, že $m_1 < m_2$) a $\Phi_1/\Phi_2 = 100$. Po dosadení

$$-5 = -2,5 \log(100) = -2,5 \cdot 2 = -5 \quad \text{čo sedí.}$$

Analogicky dostávame, že hviezda s magnitúdou o 10 menšou je $100 \cdot 100 = 10\,000$ -krát jasnejšia, s magnitúdou o 15 menšou je $100 \cdot 100 \cdot 100 = 10^6$ -krát jasnejšia, atď.. Takisto však rovnicou (POG) získavame nástroj na počítanie všetkých desatinných magnitúd medzi.

Magnitúda nula je definovaná pomocou hviezdy Vega. Ak jej zdanlivý svetelný tok označíme Φ_0 , potom z (POG) dostávame

$$m = -2,5 \log\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (5.1)$$

Konkrétna hodnota Φ_0 nie je dôležitá. Ponechávame tu istú voľnosť pre rôzne oči, či prístroje⁴. Obecne hodnotu Φ_0 nazývame **zero-point**. Ako uvidíme v kapitolách 15 a 17, existuje viacero typov magnitúd (pre rôzne filtre), a každá má svoj vlastný zero-point.

5.1 Magnitúda dvojhviezdy

Je dôležité si uvedomiť, že magnitúdy nemôžeme jednoducho sčítavať. Predstavme si, že máme dvojhviezdu, ktorej zložky nevieme rozoznať a javí sa nám ako jedna hviezda magnitúdy m . Ak sú magnitúdy zložiek m_1 a m_2 aká bude magnitúda m ? Odpoveď nie je $m = m_1 + m_2$, kvôli logaritmickému správaniu škály magnitúd v rovnici (POG). Avšak, **sčítavajú sa toky!**

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (5.2)$$

kde Φ je tok celej dvojhviezdy. Magnitúda dvojhviezdy bude podľa (5.1)

$$m = -2,5 \log\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = -2,5 \log\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_0}\right). \quad (5.3)$$

Konkrétnu hodnotu Φ_0 nebudeme pre tento výpočet potrebovať, ako uvidíme, tak sa Φ_0 vykrátí. Do (5.3) potrebujeme dosadiť vyjadrenia tokov jednotlivých hviezd. Začneme napísaním (5.1) pre prvú a druhú hviezdu

$$m_1 = -2,5 \log\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right), \quad m_2 = -2,5 \log\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right).$$

Z týchto rovníc potrebujeme vyjadriť Φ_1 a Φ_2 . Začneme osamostatnením logaritmu

$$-0,4 \cdot m_1 = \log\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right), \quad -0,4 \cdot m_2 = \log\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right),$$

kde sme využili $1/2,5 = 0,4$.

⁴Takýto prístup nazývame diferenciálna fotometria.

Teraz sa potrebujeme zbaviť logaritmu. To spravíme pomocou inverznej funkcie 10^x , pretože ak $x = \log(y)$, tak $y = 10^x$.

$$10^{-0,4 \cdot m_1} = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \quad , \quad 10^{-0,4 \cdot m_2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_0} .$$

Teraz ostáva prenásobiť rovnice tokom Φ_0 a dostávame vyjadrenia pre Φ_1, Φ_2 ,

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cdot 10^{-0,4 \cdot m_1} \quad , \quad \Phi_2 = \Phi_0 \cdot 10^{-0,4 \cdot m_2} . \quad (5.4)$$

Toto dosadíme do (5.3) a dostávame

$$m = -2,5 \log \left(\frac{\Phi_0 \cdot 10^{-0,4 \cdot m_1} + \Phi_0 \cdot 10^{-0,4 \cdot m_2}}{\Phi_0} \right) ,$$

kde sa vykrátí Φ_0 a dostávame vyjadrenie

$$\boxed{m = -2,5 \log(10^{-0,4 \cdot m_1} + 10^{-0,4 \cdot m_2})} . \quad (5.5)$$

• • •

Vyjadrenie (5.5) sa dá jednoducho rozšíriť na viacero hviezd. Celková magnitúda N hviezd bude analogicky so vzťahom (5.3)

$$m = -2,5 \log \left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_N}{\Phi_0} \right) .$$

Dosadením analogických vyjadrení pre toky ako (5.4) dostávame

$$\boxed{m = -2,5 \log(10^{-0,4 \cdot m_1} + 10^{-0,4 \cdot m_2} + 10^{-0,4 \cdot m_3} + \dots + 10^{-0,4 \cdot m_N})} . \quad (5.6)$$

Ak všetky hviezdy majú rovnakú magnitúdu m_H , dosadením do (5.6) dostávame

$$m = -2,5 \log \left(\underbrace{10^{-0,4 \cdot m_H} + 10^{-0,4 \cdot m_H} + 10^{-0,4 \cdot m_H} + \dots + 10^{-0,4 \cdot m_H}}_{N\text{-krát}} \right) = -2,5 \log(N \cdot 10^{-0,4 \cdot m_H}) .$$

Použitím identity $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ dostávame

$$m = -2,5 \left(\log(N) + \log(10^{-0,4 \cdot m_H}) \right) ,$$

kde využijeme to, že logaritmus a 10^x sú inverzné funkcie. To znamená, že $\log(10^x)$. Po roznásobení zátvorky a vymenení členov dostaneme finálny tvar

$$\boxed{m = m_H - 2,5 \log(N)} \quad (5.7)$$

Takýmto spôsobom vieme počítať magnitúdu galaxií, či hviezdokôp⁵.

⁵Samozrejme ak predpokladáme, že všetky hviezdy sú rovnako jasné.

5.2 Limitná magnitúda

Teraz si položíme otázku: Prečo v ďalekohľade dokážeme vidieť menej jasné hviezdy ako voľným okom? Je to kvôli tomu, že objektív ďalekohľadu má veľkú zbernú plochu $S_{\text{objektív}}$, ktorou zbiera svetlo o toku $\Phi_{\text{objektív}}$. To potom koncentruje do okuláru, ktorý má menšiu plochu, konkrétne S_{okular} . Tok v okulári Φ_{okular} je toľkokrát väčší, koľkokrát menšiu plochu má oproti okuláru,

$$\frac{\Phi_{\text{okular}}}{\Phi_{\text{objektív}}} = \frac{S_{\text{objektív}}}{S_{\text{okular}}} = \frac{\pi \left(\frac{D_{\text{objektív}}}{2} \right)^2}{\pi \left(\frac{D_{\text{okular}}}{2} \right)^2} = \frac{D_{\text{objektív}}^2}{D_{\text{okular}}^2}. \quad (5.8)$$

Spočítajme, aký veľký ďalekohľad (s priemerom $D_{\text{objektív}}$) potrebujeme postaviť na to, aby sme limitne videli hviezdy magnitúdy $m_{\text{objektív,lim}}$. Teda potrebujeme, aby sa hviezdy s magnitúdou $m_{\text{objektív,lim}}$ zobrazovali v okulári s jasnosťou $m_{\text{okular,lim}}$, ktorá je rovná limitnej magnitúde oka⁶.

Výdime z (POG)

$$m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektív,lim}} = -2,5 \log \left(\frac{\Phi_{\text{okular}}}{\Phi_{\text{objektív}}} \right).$$

Dosadíme (5.8) a upravíme. Využijeme vlastnosť logaritmu $\log(x^2) = 2 \log(x)$,⁷

$$m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektív,lim}} = -2,5 \log \left(\frac{D_{\text{objektív}}^2}{D_{\text{okular}}^2} \right) = -5 \log \left(\frac{D_{\text{objektív}}}{D_{\text{okular}}} \right).$$

Teraz potrebujeme vyjadriť $D_{\text{objektív}}$. Začneme prenesením -5

$$-0,2(m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektív,lim}}) = \log \left(\frac{D_{\text{objektív}}}{D_{\text{okular}}} \right),$$

a teraz sa potrebujeme zbaviť logaritmu. Inverzná funkcia ku $\log(x)$ je 10^x , teda

$$10^{-0,2(m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektív,lim}})} = \frac{D_{\text{objektív}}}{D_{\text{okular}}},$$

z čoho vyjadríme $D_{\text{objektív}}$ jednoducho

$$D_{\text{objektív}} = D_{\text{okular}} \cdot 10^{-0,2(m_{\text{okular,lim}} - m_{\text{objektív,lim}})}.$$

Častokrát má okulár priemer ako oko, teda $D_{\text{okular}} \approx D_{\text{oko}} \approx 5 \text{ mm}$. Okuláre s menším priemerom síce navýšia tok vstupujúci do oka, avšak celková zachytená energia bude rovnaká, takže hviezda sa bude v menšom okulári ako D_{oko} javiť rovnako jasná. Preto

$$D_{\text{objektív}} = D_{\text{oko}} \cdot 10^{-0,2(m_{\text{oko,lim}} - m_{\text{objektív,lim}})},$$

kde sme navyše pre prehľadnosť zamenili $m_{\text{objektív,lim}} \equiv m_{\text{oko,lim}}$.

⁶Tá závisí od konkrétneho oka, ale za dobrých podmienok to je okolo 6 mag

⁷Je to z dôvodu, toho, že $\log(x)$ je otázka: Na koľkú musím umocniť 10, aby som dostal x ? Teda ak už bolo x umocnené na druhú, tak ho budem musieť umocniť na 2-krát väčšie číslo, ako keď umocnené na druhú nie je.

5.3 Príklady

5.3.1 Definícia magnitúdy

(ZAVP - 150)

Aký je pomer svetelných tokov (intenzít) hviezd prvej a šiestej hviezdnej veľkosti (magnitúdy)?

5.3.2 Pogsonova rovnica

(ZAVP - 152)

Ak sa svetelný tok (intenzita) hviezdly zvýši 25000 krát, o koľko sa zmení jej hviezdna veľkosť (magnitúda)?

5.3.3 Magnitúda dvojhviezdy

(IOAA 2010 - T01)

V dvojhviezde má primárna zložka zdanlivú magnitúdu $m_1 = 1,0$ mag a sekundárna zložka magnitúdu $m_2 = 2,0$ mag. Aká je magnitúda dvojhviezdy ako celku?

5.3.4 Objav Pluta

Priemerná magnitúda Pluta je $m_{\text{P}} = 15$ mag. Aký je najmenší priemer ďalekohľadu v ktorom by bolo Pluto pozorovateľné? Ľudské oko má priemer $D_{\text{oko}} = 5,0$ mm a limitnú magnitúdu $m_{\text{oko}} = 6,0$ mag.

5.3.5 Výsledky

Definícia magnitúdy

Pomer svetelných tokov je 100.

Pogsonova rovnica

Hviezdna veľkosť (magnitúda) sa zmenší o 11 mag.

Magnitúda dvojhviezdy

Celková magnitúda dvojhviezdy je 0,64 mag.

Objav Pluta

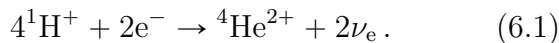
Je potrebný ďalekohľad s priemerom 32 cm.

Kapitola 6

Žiarenie hviezd

<https://youtu.be/0vAuiL2HTn0>

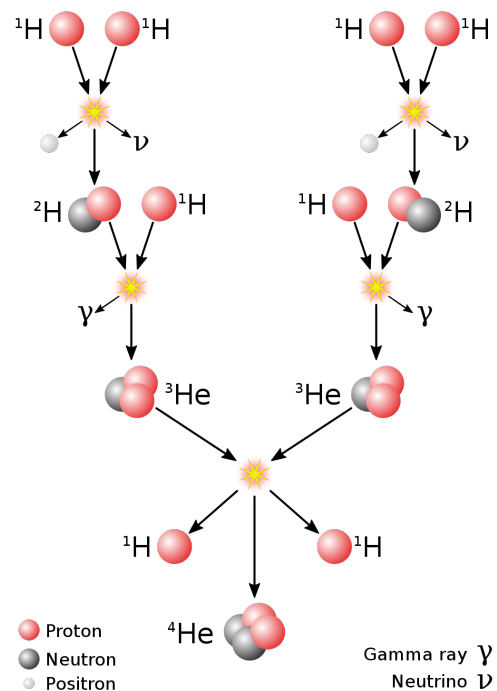
V minulej kapitole sme sa rozprávali o svetle hviezd, ktoré pozorujeme. Avšak ako toto svetlo vo hviezdach vzniká? Zdrojom energie hviezd sú termonukleárne reakcie, ktoré prebiehajú v jadre hviezd vďaka extrémne vysokým teplotám a tlakom¹. Základnou reakciou je **protón-protónový (p-p) cyklus** zobrazený na obr. 6.1, kde sa jadrá vodíka spájajú do jadra hélia². Ide teda o fúziu reakciu, ktorú rovnicou zapíšeme ako



Slovne povedané: 4 kladne nabité jadrá vodíka, ktoré obsahujú 1 nukleón (protón), a 2 záporné nabité elektróny, vytvoria 1 atóm hélia s nábojom 2+, ktoré obsahuje 4 nukleóny (2 protóny a 2 neutróny), a 2 elektrónové neutrína. Ak by sme však odvážili zložky naľavo (vodíky a elektróny), tak budú o čosi ťažšie ako zložky napravo (hélium a neutrína). Táto nezehoda nie je chyba merania, **počas reakcie sa časť hmoty premení na energiu**. O tomto hovorí slávny Einsteinov vzťah

$$E = mc^2. \quad (6.2)$$

Napríklad ak sa v p-p cykle (6.1) „stratí“ $4,765 \cdot 10^{-29}$ kg hmoty, tak to znamená vyprodukovanie $4,283 \cdot 10^{-12}$ J energie. Pre praktickosť sa používa jednotka **elektrónvolt (eV)**. Definovaná je ako množstvo energie potrebné na prenesenie elektróna (elementárneho náboja) cez napäťový rozdiel jedného voltu. Číselne: $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Veľmi často sa stretujeme s odvodenými jednotkami ako keV (10^3 -eV), MeV (10^6 -eV), GeV (10^9 -eV), atď.³ V jednom p-p cykle 6.1 vznikne 26,73 MeV energie, čo je veľmi málo. Avšak v hviezdach prebehne takýto cyklus strašne veľa, a preto dokážu žiariť tak jasno ako žiaria.



Obr. 6.1: p-p cyklus

¹A takisto vďaka kvantovej mechanike. Bez tunelového javu by teplota a tlak neboli dostatočne vysoké.

²Existujú konkurenčné procesy tvorby energie v hviezdach. Napríklad CNO cyklus, ktorý je dominantný v hmotných hviezdach. Viac info tu: https://cs.wikipedia.org/wiki/CNO_cyklus

³ľudovo ich voláme evy, kevy, mevy, gevy, atď.

Svietivosť L je celkové množstvo energie (vo všetkých vlnových dĺžkach), ktoré hviezda (objekt) vyžiari za 1 s. Ide teda o celkový svetelný výkon hviezdy. Jednotkou svietivosti sú $\text{J s}^{-1} = \text{W}$. V angličtine sa používa výraz *luminosity*, poslovenčene *luminozita*.

(Svetelný) tok F, f je celkové množstvo energie (vo všetkých vlnových dĺžkach), ktorá prejde 1 m^2 za 1 s. Ak hovoríme o toku na povrchu hviezdy používame veľké písmeno F , ak hovoríme o toku v istej vzdialenosti d od hviezdy, používame malé písmeno f . Jednotka toku je $\text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1} = \text{W m}^{-2}$. V angličtine používame výraz *flux*, ktorý sa takisto poslovenčuje.

6.1 Absolútne čierne teleso

Objekt, ktorý žiari ideálne (uvolňuje najväčšie možné množstvo energie pri danej teplote) považujeme za **absolútne čierne teleso (AČT)**. To definujeme ako **teleso, ktoré neodráža svetlo** (energiu) v celom spektre vlnových dĺžok. Všetka energia je telesom pohlcovaná⁴. Rozdelenie žiarenia AČT v rôznych vlnových dĺžkach závisí len na jeho teplote.

Stefan-Boltzmannov zákon (S-B)

Povrchový tok absolútne čierneho telesa s teplotou T je popísaný vzťahom

$$F = \sigma T^4, \quad (6.3)$$

kde $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ je Stefan-Boltzmannova konštanta.

V prírode má najbližšie k AČT reliktové žiarenie, čo je pozostatok po veľkom tresku (vzniku vesmíru). Viac sa mu budeme venovať v kapitole 22. Žiarenie hviezd má od AČT už pomerne ďaleko, ale vieme ho použiť ako prvú približnú aproximáciu.

Svietivosť Slnka je $L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$ = koľko Joulov opustí celý povrch za sekundu. Plocha povrchu Slnka o polomere $R_{\odot} = 695\,700 \text{ km}$ je $S = 4\pi R_{\odot}^2$. Povrchový tok Slnka F_{\odot} je potom

$$F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{S_{\odot}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} \doteq 6,294 \cdot 10^7 \text{ W m}^{-2}.$$

Ak by sme predpokladali, že Slnko žiari ako AČT, tak pomocou (S-B) vieme vypočítať povrchovú teplotu. Takúto teplotu nazývame **efektívna teplota T_{eff}** . Pre Slnko vychádza

$$T_{\text{eff},\odot} = \sqrt[4]{\frac{F}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{L_{\odot}}{\sigma \cdot 4\pi R_{\odot}^2}} \doteq 5772 \text{ K}.$$

Skutočná teplota fotosféry Slnka⁵ je v rozmedzí od 4400 K do 6600 K, a je to zložitá funkcia vzdialenosti od stredu. Dôsledkom toho, že fotosféra nie je plocha, ale má hrúbku, tak pozorujeme na hviezdach okrajové stemnenie disku. Totižto, na krajoch pozeráme do fotosféry viac zošikma, čo znamená, že „prenikneme“ do menšej hĺbky po povrch, kde je nižšia teplota ako v hlbších vrstvách fotosféry. Nižšia teplota znamená menší vyžarovaný tok podľa (S-B).

⁴A preto hovoríme o absolútne čiernom telese.

⁵Fotosféra je 500 km hrubá vrstva na povrchu Slnka z ktorej je emitovaná väčšina žiarenia, ktoré pozorujeme. Svetlo z hlbších vrstiev je absorbované, nedostáva sa na povrch priamo, ale až po spätnom znovuvyžarení.

6.2 Teplota Zeme

Energia vo forme elektromagnetického žiarenia (fotónov) vzniká v jadre Slnka pri fúznej reakcii. Následne putuje skrz vrstvy Slnka opakovaným absorbovaním a vyžiarovaním, až sa dopracuje na povrch, kde je emitované z fotosféry do okolitého vesmíru všetkými smermi rovnomerne. Putuje **rýchlosťou svetla vo vákuu** $c = 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$. Ak by sme sledovali žiarenie (fotóny) vyslané z povrchu Slnka v rovnaký okamih do všetkých priestorových smerov, tak by po čase t boli rozprestrené na povrchu sféry o polomere $r = ct$.

Napríklad po čase $t = 8^{\text{min}} 19^{\text{s}}$ bude mať táto sféra takmer presne polomer jednej astronomickej jednotky, $r_{\oplus} = 1\text{ au}$ (au je veľká poloos dráhy Zeme)⁶. Ak predpokladáme, že sa po ceste od Slnka na Zem neabsorbujú žiadne žiarenie, tak na spomínanú sféru s plochou $S_{\odot,\oplus} = 4\pi r_{\oplus}^2$ dopadne L_{\odot} energie. Tento výkon (energia za 1 s) sa rozprestrí rovnomerne pozdĺž sféry, ktorá je však oveľa väčšia ako povrch Slnka, preto tok $f_{\odot,\oplus}$ ktorý ňou prechádza bude výrazne menší ako povrchový tok Slnka F_{\odot} . Konkrétne

$$f_{\odot,\oplus} = \frac{L_{\odot}}{S_{\odot,\oplus}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_{\oplus}^2} \doteq 1361\text{ W m}^{-2}. \quad (6.4)$$

Slnčný tok pri Zemi má špeciálne označenie: **slnčná konštanta** $k_{\oplus} = 1361\text{ W m}^{-2}$. Na povrch Zeme však dopadne menší tok, kvôli tomu, že časť energie sa odráža naspäť do vesmíru, buď od atmosféry, alebo od povrchu.

Albedo A je celková odrazivosť telesa. Je to číslo medzi 0 a 1, pričom albedo 0 znamená AČT a albedo 1 dokonalé zrkadlo. Albedo Zeme je najnižšie v lete a najvyššie v zime. Zmeny sú spôsobené snehovou pokrývkou, ktorá odráža viac. Problémom je, že čím viac ľadovcov sa roztopí, tým menšie bude albedo a tým viac energie Zem prijme, čím sa zahreje a roztopia sa ďalšie ľadovce. Tento efekt sa nabaľuje na seba a je to dôvod prečo by sme mali obmedziť globálne otepľovanie. Priemerné albedo Zeme sa udáva $A_{\oplus} = 0,30$.

Emisivita ϵ je pomer toho, koľko energie vyžiari teleso voči AČT s rovnakou teplotou. Je to číslo medzi 0 a 1, pričom emisivita 0 odpovedá čiernej diere⁷, a emisivita 1 odpovedá AČT. (S-B) vieme rozšíriť mimo AČT nasledovne

$$F = \epsilon\sigma T^4. \quad (6.5)$$

Emisivita zemského povrchu je okolo $\epsilon_{\oplus,\text{P}} = 0,95$. Avšak kvôli oblakom a skleníkovému efektu je teplo zadržované pri povrchu Zeme, čo spôsobuje, že efektívna emisivita Zeme pozorovaná z vesmíru je približne $\epsilon_{\text{eff}} = 0,60$.

Teraz sa pokúsime spočítať priemernú teplotu pri povrchu Zeme. Pripomeňme si sféru s polomerom 1 au na ktorú je rozprestrený výkon L_{\odot} . Aká časť tejto sféry sa pretína so Zemou? To bude určovať výkon $P_{\odot,\oplus}$, ktorý Zem „získa“ od Slnka. Priesečník sféry a gule je približne kruh, ak je sféra dostatočne veľká (čo v tomto prípade je), konkrétne je to kruhový prierez Zeme,

⁶Malé r budeme používať ak ide o polomer dráhy, respektíve vzdialenosť naprieč vesmírom. Veľké R ak ide o polomer planéty. Obdobne pri iných veličinách, veľké písmeno sa vzťahuje priamo na daný objekt (F, M, \dots)

⁷Pretože iba pohlcuje energiu a nevyžaruje ju naspäť (ak zanedbáme Hawkingovo žiarenie, čo je extrémne pomalé „vyparovanie“ čiernych dier).

čiže kruh s plochou $S_{\oplus,rez} = \pi R_{\oplus}^2$. Samozrejme nesmieme zabudnúť na to, že časť energie sa od Zeme odrazí, konkrétne A_{\oplus} -násobok. Tým pádom prejde $(1 - A_{\oplus})$ -násobok,

$$P_{\odot,\oplus} = f_{\odot,\oplus} \cdot S_{\oplus,rez} \cdot (A_{\oplus} - 1) = k_{\oplus} \cdot \pi R_{\oplus}^2 \cdot (A_{\oplus} - 1) = \pi(A_{\oplus} - 1)k_{\oplus}R_{\oplus}^2. \quad (6.6)$$

Výkon, ktorý Zem prijme následne vyžiari celým povrchom, teda väčšou plochou ako ho prijala. Plocha povrchu Zeme je $S_{\oplus} = 4\pi R_{\oplus}^2$. Využitím (6.5) dostávame pre vyžarovanie (tok Zeme F_{\oplus}) rovnicu

$$\frac{P_{\odot,\oplus}}{4\pi R_{\oplus}^2} = F_{\oplus} = \varepsilon_{\text{eff}}\sigma T_{\oplus}^4, \quad (6.7)$$

kde T_{\oplus} je priemerná teplota pri povrchu Zeme. Kombináciou vzťahov (6.6) a (6.7) – daním do rovnosti absorpciu a vyžarovanie Zeme – dostávame

$$\pi(A_{\oplus} - 1)k_{\oplus}R_{\oplus}^2 = \varepsilon_{\text{eff}}\sigma T_{\oplus}^4 \cdot 4\pi R_{\oplus}^2,$$

z čoho vieme vyjadriť T_{\oplus} ako

$$T_{\oplus} = \sqrt[4]{\frac{(A_{\oplus} - 1)k_{\oplus}}{4\varepsilon_{\text{eff}}\sigma}} \doteq 289 \text{ K} \doteq 16 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

6.3 Príklady

6.3.1 Einsteinovo Slnko

(ZAVP - 181)

Koľko kg látky stratí Slnko za rok? Na koľko rokov života by Slnku stačila súčasná hmotnosť, ak by vedelo využiť všetku svoju hmotu na žiarenie, a žiarilo by stále rovnako ako v súčasnosti? Hmotnosť Slnka je $1,99 \cdot 10^{30}$ kg a za sekundu vyžiari $3,83 \cdot 10^{26}$ J energie. Rýchlosť svetla je $3,00 \cdot 10^8$ m s⁻¹.

6.3.2 Svietivosť hviezd

(IOAA 2007 - T09)

Vypočítajte svietivosť hviezdy L , v jednotkách svietivosti Slnka L_{\odot} . Efektívna teplota hviezdy je 7500 K a polomer $2,5 R_{\odot}$. Efektívna teplota Slnka je 5800 K.

6.3.3 Solárna konštanta na Marse

(ZAVP - 183)

Vypočítajte hodnotu solárnej konštanty pre Mars k_{δ} . Veľká poloos dráhy Marsu je $a_{\delta} = 1,524$ au. Solárna konštanta pri Zemi je $k_{\oplus} = 1361$ W m⁻².

6.3.4 Povrchová teplota planéty

(IOAA 2007 - T16)

Rýchlo rotujúca planéta s polomerom R a albedom A obieha hviezdu svietivosti L na kruhovej dráhe s polomerom a . Predpokladajte, že planéta nemá atmosféru a vyžaruje ako absolútne čierne teleso. Úlohy:

- (a) Aký je svetelný tok hviezdy na povrchu planéty?
- (b) Koľko energie z hviezdy prijme povrch planéty za sekundu?
- (c) Aká je priemerná teplota povrchu planéty?
- (d) Ak by sme predpokladali, že planéta je na hviezdu natočená vždy iba jednou stranou, aká bude priemerná teplota tejto strany?

6.3.5 Výsledky

Einsteinovo Slnko

Slnko stratí za rok $1,34 \cdot 10^{17}$ kg hmoty. Jeho súčasná hmotnosť by mu teoreticky vystačila na $1,48 \cdot 10^{13}$ rokov, čo je vyše 1000-násobok veku vesmíru. V skutočnosti sa však nemôže všetka látka premeniť na energiu, čo znamená, že Slnko bude žiť oveľa kratšie (ešte asi 5 miliárd rokov).

Svietivosť hviezdy

Svietivosť hviezdy je približne $17 L_{\odot}$.

Solárna konštanta na Marse

Na Mars dopadá tok (solárna konštanta pri Marse je) $586,0 \text{ W m}^{-2}$.

Povrchová teplota planéty

- (a) Svetelný tok na povrchu planéty je $\frac{L}{4\pi a^2}$.
- (b) Povrch planéty prijme $(1 - A) \frac{LR^2}{4a^2}$.
- (c) Teplota povrchu planéty je $\sqrt[4]{\frac{(1-A)L}{16\pi\sigma a^2}}$.
- (d) Teplota povrchu planéty s viazanou rotáciou je $\sqrt[4]{\frac{(1-A)L}{8\pi\sigma a^2}}$.

Kapitola 7

Paralaxa

https://youtu.be/GEaQj_2WBiM

Vo vesmíre je meranie vzdialeností problém. Nemôžeme zobrať meter a natiahnuť ho ku inej hviezde. Preto ľudia prichádzajú na rôzne šikové „triky“, ako vzdialenosť vo vesmíre merať. Jedným z nich je paralaxa.

Princíp je založený na pozorovaní jedného objektu z dvoch miest. Môžete si to vyskúšať, ak budete striedavo zatvárať jedno oko. Objekty pred vami „skáču“ hore-dole, avšak čím je objekt ďalej, tým skáče menej. Toto „poskakovanie“ sa dá využiť aj vo vesmírnom meradle, avšak musíme použiť väčšiu základňu, teda pozorovateľne ďalej od seba ako sú naše oči.

Rovníková paralaxa π_{\oplus} je uhol posunu pozorovaného objektu pri použití polomeru Zeme R_{\oplus} ako základne. Je užitočná na vypočítanie vzdialeností telies v slnečnej sústave.

Ročná paralaxa π je uhol posunu pozorovaného objektu pri použití veľkej poloosi dráhy Zeme a_{\oplus} ako základne. Je užitočná na vypočítanie vzdialenosti hviezd v našej galaxii.

Výpočet vzdialenosti objektu z jeho paralaxy je čisto geometrický. Na obr. 7.1 je znázornená situácia pre ročnú paralaxu. Pre paralaxu rovníkovú je situácia a následný výpočet analogický, zameníme $a_{\oplus} \leftrightarrow R_{\oplus}$.

Pre presný výpočet vjdeme z pravouhlého $\triangle HSZ_1$ (respektíve mohli by sme použiť $\triangle HSZ_2$) v ktorom platí¹

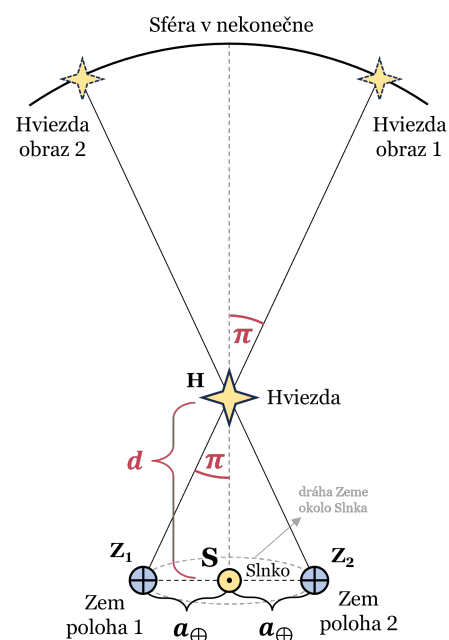
$$\tan(\pi) = \frac{a_{\oplus}}{d}.$$

Z toho vyjadríme vzdialenosť d ako

$$d = \frac{a_{\oplus}}{\tan(\pi)} = \frac{1 \text{ au}}{\tan(\pi)}. \quad (7.1)$$

Avšak pozor! Vo väčšine prípadov, ktoré nastávajú v astronómii je paralaxa veľmi malá, pretože vzdialenosť objektu je oveľa väčšia ako použitá základňa ($d \gg a_{\oplus}$). Potom môžeme použiť aproximáciu

$$\tan(x) \approx x, \quad x \ll 1, \quad [x] = \text{rad}, \quad (7.2)$$



Obr. 7.1: Ročná paralaxa

¹Paralaxu značíme písmenkom π , čo je mierne máätúce, avšak ide o zaužívanú astronomickú konvenciu.

ktorá platí kvôli tomu, že dlhý natiahnutý pravouhlý trojuholník (dolná časť obr. 7.1) má veľmi blízko k uzučkému výseku veľkého kruhu (horná časť obr. 7.1). Ak je polomer kruhu d , tak jeho obvod bude² $2\pi d$. Preto ak na ňom vysekneme malinký uhol x , ktorý meriame v radiánoch, tak dĺžka kružnicovému výseku bude xd , z dôvodu že celý kruh má 2π radiánov².

Tangens je pomer krátkej odvesny ku dlhej odvesne, čo je v aproximovanom prípade pomer kružnicového výseku ku polomeru, teda $\tan(x) \approx xd/d = x$. Treba si však dať pozor, keďže ***toto platí len pre radiány, v stupňoch to nefunguje!***

Zároveň však vidíme, že pre sínus, ktorý je pomer krátkej odvesny a prepony, platí to isté, pretože prepona je v aproximácii kružnicového výseku takisto rovná polomeru kruhu. Takže analogicky

$$\sin(x) \approx x \quad , \quad x \ll 1 \quad , \quad [x] = \text{rad} \quad . \quad (7.3)$$

Aproximácie sú v astrofyzike dôležité, keďže sa môže stať, že bez nich by sme nevedeli analyticky nejaký príklad dopočítať, alebo by to bolo mnohonásobne ťažšie. V kapitole 26 sa aproximáciám a približným výpočtom budeme venovať podrobnejšie.

Aplikáciou (7.2) na (7.1) dostávame

$$d = \frac{a_{\oplus}}{\pi} = \frac{1 \text{ au}}{\pi} \quad . \quad (7.4)$$

Tento vzťah nám poskytuje prirodzený spôsob na zavedenie jednotky vzdialenosti. Konkrétne, ak dosadíme do neho paralaxu v oblúkových sekundách³, tak číslo ktoré dostaneme je vzdialenosť v jednotke **parsek pc**. Inými slovami, jeden parsek je taká vzdialenosť, z akej by bolo vidieť tyč s dĺžkou jednej astronomickej jednotky pod uhlom jednej oblúkovej sekundy.

Nezabúdajme, že vzťah je pôvodne definovaný pre radiány. Jedna uhlová sekunda je $1/60^2 = 1/3600$ stupňa a 360 stupňov sú 2π radiány. Prepočet medzi oblúkovými sekundami a radiánmi bude

$$1'' = \frac{1}{3600} \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \doteq \frac{1}{206265} \text{ rad} \quad . \quad (7.5)$$

Dosadením $d = 1 \text{ pc}$ a $\pi = 1''$ do (7.4) a využitím prepočtu (7.5) dostávame veľkosť jedného parseka⁴

$$1 \text{ pc} \doteq \frac{1 \text{ au}}{1''} = \frac{1 \text{ au}}{(1/206265)} = \mathbf{206\,265 \text{ au}} \quad . \quad (7.6)$$

Jednotku parsek je výhodné používať pri veľkých vzdialenostiach. Ďalšou široko používanou jednotkou sú **svetelné roky ly**. Jeden svetelný rok je vzdialenosť, ktorú preletí svetlo rýchlosťou c za jeden juliánsky rok. Juliánsky rok je definovaný ako presne $365,25 \text{ dňa} = 31\,557\,600 \text{ sekúnd}^5$.

Ak by sme chceli spočítať vzťah medzi svetelným rokom a parsekom, tak si musíme spomenúť na to, že sme v predchádzajúcej kapitole spočítali, že svetlo preletí 1 au za $8;19^{\text{min}} \doteq^{\text{s}} 499 \text{ s}$. Podelením dostávame, že za rok svetlo preletí $63\,242 \text{ au}$, a teda **$1 \text{ pc} \doteq 3,262 \text{ ly}$** .

²Tu je π ako π , nie paralaxa. Strašný zmätok.

³Pri malých uhloch sa zvykne používať jednotka mas, čo je $0,001''$ – z anglického *MiliArcSecond*.

⁴Jednotka rad zmizne, pretože radiány sú bezrozmerné a vzťah (7.4) je v základných jednotkách SI.

⁵Pre rýchle približné počty sa dá použiť aproximácia 1 rok $\doteq \pi \cdot 10^7 \text{ s}$.

7.1 Absolútna magnitúda

V kapitole 5 sme sa zaoberali magnitúdou hviezd pri pozorovaní zo Zeme (značíme malým m). Avšak, rôzne hviezdy sú rôzne ďaleko, čo znamená, že hviezda so slabou magnitúdou môže byť veľmi jasná, len je veľmi ďaleko. Preto hviezdám priradíme absolútnu magnitúdu, čo je magnitúda po hypotetickom prenesení hviezd na rovnakú vzdialenosť.

Absolútna zdanlivá magnitúda M je magnitúda hviezd vnímaná ľudským okom, ak by sme hviezdu presunuli do vzdialenosti 10 pc. Ide o magnitúdu pozorovateľnú vo viditeľnom spektre a vieme ju prepojiť so zdanlivým svetelným tokom Φ , ale nie celkovým svetelným tokom f či svietivosťou L , pretože to sú veličiny, ktoré sa vzťahujú na všetku energiu, teda aj na žiarenie v oblastiach spektra, ktoré naše oko nevidí.

Napíšme si Pogsonovu rovnicu (POG) pre magnitúdy m a M .

$$m - M = -2,5 \log\left(\frac{\Phi}{\Phi_{10}}\right), \quad (7.7)$$

kde Φ_{10} je zdanlivý svetelný tok vo vzdialenosti $d_{10} = 10$ pc od hviezdy. Člen naľavo nazývame **modul vzdialenosti** ($m - M$), a vieme ho prepojiť so vzdialenosťou hviezdy d .

Spomeňme si na výpočet slnečnej konštanty v rovnici (6.4) a na úvahu v odstavčeku nad ňou. Energia z hviezdy sa rozkladá na sférickú plochu s obsahom $4\pi d^2$. To znamená, že tok klesá s druhou mocninou vzdialenosti, čo zapíšeme ako $\Phi \sim 1/d^2$. Preto sa dá pomer tokov dať do súvisu s prevráteným pomerom vzdialeností. Konkrétne

$$\frac{\Phi}{\Phi_{10}} = \frac{d_{10}^2}{d^2} = \left(\frac{10 \text{ pc}}{d}\right)^2. \quad (7.8)$$

Analogický vzťah platí pre celkový tok f , keďže ten takisto klesá s druhou mocninou vzdialenosti. Matematicky zapísané $f \sim 1/d^2$.

Dosadením (7.8) do (7.7) a úpravou dostávame⁶

$$m - M = -2,5 \log\left(\left(\frac{10 \text{ pc}}{d}\right)^2\right) = -5 \log\left(\frac{10 \text{ pc}}{d}\right).$$

Ak budeme vzdialenosť d rátať v parsekoch, tak v zlomku zmizne jednotka pc. Po rozdelení logaritmu na dva⁷ a vypočítaní jedného z logaritmov dostávame

$$m - M = -5(\log(10) - \log(d)) = -5 \cdot 1 - (-\log(d)) \quad , \quad [d] = \text{pc}.$$

Finálny tvar medzi modulom vzdialenosti a vzdialenosťou je

$$\boxed{m - M = -5 + 5 \log(d) \quad , \quad [d] = \text{pc}}. \quad (7.9)$$

⁶Využili sme vlastnosť logaritmu $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$.

⁷Keďže $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$.

Tento vzťah je užitočný, keďže absolútnu magnitúdu vieme pri niektorých hviezdach, galaxiách či iných objektoch určiť trikom. Zároveň vieme jednoducho namerať ich magnitúdu m zo Zeme. Z toho dostávame modul vzdialenosti ($m - M$). Na základe neho vieme následne zo vzťahu (7.9) určiť vzdialenosť objektov, ktoré sú príliš ďaleko na to aby sme odmerali ich paralaxu.

Vyjadrenie vzdialenosti d zo vzťahu (7.9) je nasledovné:

$$\begin{aligned} m - M &= -5 + 5 \log(d) \quad , \quad [d] = \text{pc} \\ m - M + 5 &= 5 \log(d) \quad , \quad [d] = \text{pc} \\ 0,2(m - M + 5) &= \log(d) \quad , \quad [d] = \text{pc} \\ \boxed{d = 10^{0,2(m-M+5)}} \quad , \quad [d] = \text{pc} \end{aligned}$$

7.2 Extinkcia

Medzihviezdna extinkcia A je počet magnitúd ktoré sa „stratia“ vplyvom medzihviezdného prostredia. Ku písmenu A pridávame index podľa časti spektra v ktorej pozorujeme. Zatiaľ sa zaoberáme iba vizuálnou časťou (ktorú vidí naše oko), takže pridáme index $V \Rightarrow A_V$. Alternatívne dáme V do zátvorky $\Rightarrow A(V)$. Keď hovoríme o „strácaní“ magnitúd znamená to, že stúpa magnitúda m pozorovaná zo Zeme⁸.

Koeficient medzihviezdnej extinkcie a $= A/d$ je medzihviezdna extinkcia⁹ vzťahnutá na jednotku vzdialenosti. Zvykne sa používať jednotka **mag/kpc**, teda koľko magnitúd sa „stratí“ na tisíc parsekoch¹⁰.

Po zarátaní medzihviezdnej extinkcie modul vzdialenosti ($m - M$) stúpne (lebo stúpne m), preto musíme na pravú stranu rovnice (7.9) pripočítať absorpčný člen $+A_V = +a_V d$, ktorý predstavuje celkovú magnitúdu, ktorá sa „stratí“. Dostávame

$$\boxed{m - M = -5 + 5 \log(d) + a_V d} \quad , \quad [d] = \text{pc} \quad . \quad (7.10)$$

Ak by ste sa pokúsili z tohto vzťahu vyjadriť d narazíte na problém, že vám to nepôjde. Totižto táto rovnica nie je analyticky riešiteľná, to znamená, že neexistuje jej všeobecné vyjadrenie, kde by sme mali $d = (\text{niečo neobsahujúce } d)$. V takomto prípade musíme počítat vzdialenosť numericky čo si ukážeme v kapitole 26 o približných výpočtoch.

⁸Nezabúdajme, že čím väčšia magnitúda, tým slabší objekt!

⁹Slovenské zdroje namiesto označenia *koeficient extincie* používajú označenie *absorpcia*.

¹⁰V smere galaktického disku dosahuje až 1,8 mag/kpc, v kolmom smere je zanedbateľná

7.3 Príklady

7.3.1 Rovníková paralaxa z Mesiaca

(ZAVP - 1)

Priemer Mesiaca je 0,27 priemeru Zeme. Určite rovníkovú paralaxu Slnka pre pozorovateľa na Mesiaci. Vzdialenosť Mesiaca od Zeme zanedbajte.

7.3.2 Slnko z Rigelu

Absolútna jasnosť Slnka je 4,82 mag. Aká bude jeho zdanlivá jasnosť pri pozorovaní z hviezdy Rigel? Vzdialenosť Slnko – Rigel je 863 ly? Uvažujte koeficient medzihviezdnej extinkcie (absorbencie) $a_V = 0,8 \text{ mag kpc}^{-1}$.

7.3.3 Pulzujúca premenná hviezda

(AO 2008, ZŠ FI - 3)

Pulzujúce premenné hviezdy (Cefeidy) menia svoju jasnosť v dôsledku periodicky sa opakujúceho zväčšovania a zmenšovania svojej veľkosti, pričom z pozorovaní vieme, že existuje vzťah medzi periódou a absolútnou hviezdnu veľkosťou v maxime takejto hviezdy

$$M = -1,63 - 2,54 \log P.$$

Vypočítajte ročnú paralaxu pulzujúcej premennej hviezdy, ktorej zdanlivá hviezdna veľkosť je $m = 4,2 \text{ mag}$ a perióda 40 dní.

7.3.4 Výsledky

Rovníková paralaxa z Mesiaca

Paralaxa Slnka bude 2,4".

Slnko z Rigelu

Slnko bude mať zdanlivú magnitúdu 12,13 mag.

Pulzujúca premenná hviezda

Paralaxa Cefeidy je približne 0,001".

Kapitola 8

Nebeské súradnice

<https://youtu.be/dEg9uL6Hp4I>

Na oblohe pozorujeme množstvo hviezd a iných objektov, preto prichádza prirodzená potreba určovania polohy, či už z dôvodov pozorovacích alebo archivačných. Naším cieľom v tejto kapitole, bude „vymyslieť“ a uchopiť súradnice, ktoré by nám umožnili jednoducho určovať polohy hviezd. Ukážeme si, že existuje viac možností, a povieme si ktorá je v ktorej situácii lepšia.

Nebeská sféra je sféra s nekonečným polomerom v ktorej strede sa nachádza Zem. Budeme uvažovať, že na tejto sfére sú „pripnuté“ všetky hviezdy a ďalšie objekty. Na túto sféru môžeme kresliť hlavné a vedľajšie kružnice. **Hlavná kružnica** je taká kružnica na sfére, ktorá má stred v strede sféry. Napríklad na Zemi sú rovník a poludníky hlavnými kružnicami¹. Naproti tomu **vedľajšia kružnica** nemá stred v strede sféry. Na Zemi sú vedľajšie kružnice rovnobežky.

Ako si vyrobiť súradnicový systém a určiť polohu hviezdy? Na začiatok si zvolíme jednu hlavnú kružnicu, ktorú budeme nazývať **fundamentálna kružnica**, a na nej jeden bod, ktorý budeme nazývať **počiatok**. Ďalej spravíme priemet hviezdy na fundamentálnu kružnicu. To znamená, vyberieme na nej bod, ktorý je najbližšie ku hviezde. Následne bude prvou súradnicou uhol počiatok – stred sféry – priemet, druhou súradnicou priemet – stred sféry – hviezda. Treťou súradnicou bude vzdialenosť, avšak tá je v prípade nebeskej sféry nekonečno, teda nič nehovoriaca, a môžeme na ňu zabudnúť.

Uhol formátu *niečo – stred sféry – dačo* nazývame takisto aj **uhlová vzdialenosť** medzi *niečo* a *dačo*. Vzdialenosť v metroch nedáva zmysel na nebeskej sfére, ktorá je nekonečne veľká, preto používame vzdialenosti uhlové.

Pozrime sa teraz na základné sférické súradnicové systémy na nebeskej sfére, a to kedy sú užitočné. Líšia sa definíciami fundamentálnej kružnice a počiatku.

¹Ak uvažujeme, že Zem je dokonalá guľa.

Kapitola 9

Ekliptika

<https://youtu.be/bkUP3F9g0tw>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 10

Ďalekohľad

<https://youtu.be/Pd4ElijaLnQ>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 11

Energia

<https://youtu.be/S1lsZ41otYM>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 12

Úniková rýchlosť

<https://youtu.be/k96ZUgW1bCU>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 13

Moment hybnosti

<https://youtu.be/Y8nUyUYBt1U>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 14

Spektrálny tok

<https://youtu.be/BJW1kmL3Lwc>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 15

Bolometrická magnitúda

<https://youtu.be/ydwBFSlioLw>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 16

Premenné hviezdy

<https://youtu.be/xYWhdM9P7ow>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 17

Farebný index

<https://youtu.be/74w-Q3ulAOU>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 18

Sférická trigonometria

<https://youtu.be/91cY59iPqEo>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 19

Astrofotografia

<https://youtu.be/UyAEcln5VwM>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 20

Dopplerov efekt

<https://youtu.be/xVTQuKGYYSY>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 21

Hubblov zákon

<https://youtu.be/5ytnUOPyas0>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 22

Kozmologické modely

(video-zatial-neexistuje)

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 23

Gaussov zákon

<https://youtu.be/tuNHjkZJJpU>

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 24

Relativita

videozatianeexistuje

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 25

Sférické transformácie

videozatianeexistuje

Bude pridané čoskoro.

Kapitola 26

Približné výpočty

videozatia neexistuje

Bude pridané čoskoro.