

Astronomická olympiáda 2025

Kolo: domáce kolo Dátum zverejnenia: 06. 12. 2024
Kategória: **stredná škola** Dátum odovzdania: **09. 02. 2025**

- Každý príklad riešte na *samostatný* list papiera.
- Do hlavičky uveďte: číslo príkladu, vaše meno, adresu, dátum narodenia, emailovú adresu a názov školy.
- Súbory vo formáte pdf alebo naskenované dokumenty zasielajte na emailovú adresu **ao@aosk.sk**.
- Vaše riešenia popíšte aj *slovne*, nielen matematicky.
- Pri výpočtoch použite hodnoty konštánt a jednotiek uvedených v konštantovníku *na posledných stranách*.
- Upozorňujeme, že nie všetky konštanty sú potrebné.



Slovenská ústredná hviezdáreň
v Hurbanove

**Slovenská
Astronomická
Spoločnosť**
pri Slovenskej akadémii vied

1 Röntgenová hviezda

(50b, autor: Samuel Amrich)

Obdobia silnej slnečnej aktivity sa prejavujú mimo iného aj slnečnými erupciami (v angl. *solar flares*). Tie sa zvyknú označovať písmenami A, B, C, M, X, podľa intenzity. Pričom najjasnejšie erupcie typu X, ktoré nie sú až tak výnimočné, dokážu vytvoriť tok v röntgenovej oblasti elektromagnetického spektra na úrovni $F = 10^{-4} \text{ W m}^{-2}$.

Táto hodnota však môže byť mierne náročná na predstavu. Preto si ju prevedieme na niečo astronomickému oku bližšie. Predstavte si, že celý tento tok F by k nám prichádzal vo viditeľnej oblasti od vzdialenej hypotetickej hviezdy. Akú by mala táto hviezda magnitúdu? Môže sa vám hodiť, že Vega má magnitúdu približne $m_{\text{Vega}} = 0 \text{ mag}$ a vo viditeľnej oblasti z nej zachytávame tok okolo $F_{\text{Vega}} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$.

2 Velké americké zatmenie

(70b, autor: R. Lascsák & J. Švrčková)

Výpravu cestovateľov za zatmením Slnka zastihne nepriaznivé počasie, a tak sa rozhodnú mrakom utiecť. Na radarovej predpovedi počasia zistia, že jasná obloha bude počas zatmenia v meste Hot Springs Village. Zaparkovať vedľa pri mexickej reštaurácii El Padrino, ktorá sa nachádza presne jednu hodinu jazdy autom od ich štartovnej polohy.

Podarí sa im tam docestovať pred začiatkom úplného zatmenia, ak v momente ich štartu sa v Hot Springs Village práve začalo čiastočné zatmenie Slnka (kotúč Mesiaca sa zdanlivo na oblohe prvýkrát dotkol kotúča Slnka)? Predpokladajte, že dráhy Zeme a Mesiaca sú kružnice a polomer Mesiaca je 1800 km.

3 Pevné kosti

(80b, autor: Lukáš Hudák)

Pozorovateľ s pevnými kosťami stojaci na nerotujúcej neutrónovej hviezde s hmotnosťou $2,1 M_{\odot}$, vzdialenej 1400 pc od Zeme, pozoruje Slnko. Spektrálnou fotometriou zistil, že maximum toku vyžarovania Slnka je pre $\lambda = 372$ nm. Predpokladajte, že po odčítaní efektu rozpínania vesmíru sú Slnko a neutrónová hviezda vzhľadom na seba v pokoji.

- (a) [25 b] Popíšte a vypočítajte vplyv rozpínania vesmíru (kozmozologického červeného posunu) na vlnovú dĺžku slnečného svetla, ktoré pozoroval pozorovateľ na neutrónovej hviezde.
- (b) [55 b] Určte, či môžeme vplyv rozpínania vesmíru zanedbať voči gravitačnému posunu vlnovej dĺžky a vypočítajte polomer neutrónovej hviezdy.

Fotón si predstavte ako malú guľičku s ekvivalentnou hmotnosťou m_F , ktorá sa pohybuje v gravitačnom poli hmotného objektu (hviezdy). Keďže platí zákon zachovania energie, tak pri vzdalovaní fotónu od hviezdy sa musí predlžovať jeho vlnová dĺžka. Tento efekt voláme gravitačný červený (modrý) posun.

Ako nápovedu uvádzame vzťahy pre kinetickú (E_K) a potenciálnu (E_P) energiu fotónu vo vzdialenosti r od stredu telesa o hmotnosti M .

$$E_K(r) = \frac{hc}{\lambda(r)} \quad , \quad E_P(r) = -G \frac{Mm_F}{r} \quad , \quad m_F = \frac{h}{c\lambda(r)} \quad , \quad (3.1)$$

kde h je Planckova konštanta a c je rýchlosť svetla vo vákuu.

Pre záujemcov o ďalšie informácie o gravitačnom červenom a modrom posune odporúčame online dostupný zdroj: <https://vixra.org/pdf/1704.0123v1.pdf>

4 Vera Rubin

(80b, autor: Samuel Amrich)

V roku 1979 bol podaný článok do časopisu The Astrophysical Journal od astronómky Vera Florence Cooper Rubin a jej kolegov. Článok je prevratný z dôvodu, že v ňom Vera Rubin na základe meraní zo spektrografov odhaľuje jednu zo základných vlastností galaxií, ktorú už v súčasnosti považujeme za nerozporovateľnú, ich ploché rotačné krivky.

Viac o význame tohto objavu je možné nájsť si v jej neskoršom článku v Science z roku 1983 The Rotation of Spiral Galaxies by Vera C. Rubin. My sa ale pozrieme iba na jednu konkrétnu galaxiu a pokúsime sa zreprodukovat rovnaké odhaľovanie výsledkov, akým prechádzala Vera Rubin v 70-tych rokoch.

V tabuľke 4.1 nižšie máte merania orbitálnej rýchlosti v závislosti od vzdialenosti od centra galaxie UGC 2885 na obrázku 4.1, ktorá patrí medzi najväčšie pozorované špirálovité galaxie a zvykne sa niekedy označovať aj ako Rubin's Galaxy (Rubinina galaxia, z angličtiny).



Obr. 4.1: Galaxia UGC 2885, HST.

Tabuľka 4.1: Meranie rotačnej rýchlosti v v galaxii UGC 2885 v závislosti od vzdialenosti od galaktického jadra R . Hodnoty sú prevzaté priamo z prvého článku *Astrophysical Journal*, Part 1, vol. 238, June 1, 1980, p. 471-487.

Index	R [kpc]	v [km s ⁻¹]	Index	R [kpc]	v [km s ⁻¹]
1	0	0	20	22	250
2	0,5	-	21	24	250
3	1,0	208	22	26	250
4	1,5	272	23	28	255
5	2	287	24	30	263
6	2,5	285	25	32	274
7	3	270	26	34	283
8	4	251	27	38	285
9	5	241	28	42	275
10	6	239	29	46	268
11	7	239	30	48	270
12	8	242	31	52	279
13	9	244	32	56	-
14	10	246	33	62	321
15	12	250	34	66	289
16	14	250	35	70	275
17	16	250	36	74	259
18	18	250	37	78	262
19	20	250	38	82,3	273

Vyriešte nasledujúce úlohy.

- [30b] Narysujte všetky tieto merania do grafu na milimetrový papier.
- [20b] Pomocou pravítka a rysovania do grafu určte na akej konštantnej hodnote $y(x) = B$ sa ustalaže orbitálna rýchlosť galaxie.
- [20b] Pomocou pravítka a rysovania do grafu určte parametre lineárneho predpisu funkcie $y(x) = A \cdot x$ podľa ktorého sa vyvíja orbitálna rýchlosť v centrálnej časti galaxie.
- [10b] Určte v akej vzdialenosti od centra galaxie dochádza k splošteniu krivky orbitálnej rýchlosti v galaxii pomocou priesečníka konštantnej funkcie z (a) a lineárnej funkcie z (b).

Pripomínam, že úlohu riešte iba pomocou ručného vynášania bodov do grafu na milimetrový papier a neprogramovateľnej kalkulačky. Pod riešením sa rozumie ručné nakreslenie grafu na milimetrový papier aj s trendovou spojnicou, ktorá sa určuje priamo z bodov na papieri, tak ako je to zvykom na medzinárodnom kole. Analýzou chýb sa nemusíte tentokrát trápiť.

Ak je pre vás úloha na dátovú analýzu doteraz neznáma novinka, môže sa vám hodiť videonávod na www.datova-analyza.aosk.eu alebo riešenie minuloročnej dátovej analýzy domáceho kola v archíve úloh, prípadne skriptá pre dátovú analýzu na stránke AO.

5 Počítanie hviezd

(120b, autor: Samuel Amrich)

Počet viditeľných hviezd na oblohe je veľké číslo, ale bolo by možné ho aspoň odhadnúť? O to sa presne v tejto praktickej úlohe pokúsite. Za pomoci azimutového stolčeka alebo ďalekohľadu na montáži so stupnicou odmerajte súradnice trojice hviezd, ktorá vytvára pekný, pravidelný trojuholník. Zo zistenej trojice súradníc následne vypočítate veľkosti strán tohto sférického trojuholníka podľa vzorca pre azimutálne súradnice (A, h)

$$\Delta_3 = \arccos(\sin(h_1)\sin(h_2) + \cos(h_1)\cos(h_2)\cos(A_1 - A_2)) \quad (5.1)$$

alebo ekvivalentne pre ekvatoriálne súradnice (t, δ)

$$\Delta_3 = \arccos(\sin(\delta_1)\sin(\delta_2) + \cos(\delta_1)\cos(\delta_2)\cos(t_1 - t_2)). \quad (5.2)$$

Kde používame klasické značenie súradníc a indexy cyklicky zamieňame. Cyklické zamieňanie znamená, že index 1 zameníme za index 2 ($1 \rightarrow 2$), index 2 za index 3 ($2 \rightarrow 3$) a index 3 za index 1 ($3 \rightarrow 1$). To môžeme spraviť dvakrát a takto dostať všetky tri potrebné permutácie vzťahov vyššie na výpočet všetkých strán sférického trojuholníka $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Pomocou strán sférického trojuholníka je možné vypočítať jeho obsah pomocou vzťahu

$$S = 4 \arctan \left(\sqrt{\tan\left(\frac{d}{2}\right) \tan\left(\frac{d - \Delta_1}{2}\right) \tan\left(\frac{d - \Delta_2}{2}\right) \tan\left(\frac{d - \Delta_3}{2}\right)} \right), \quad (5.3)$$

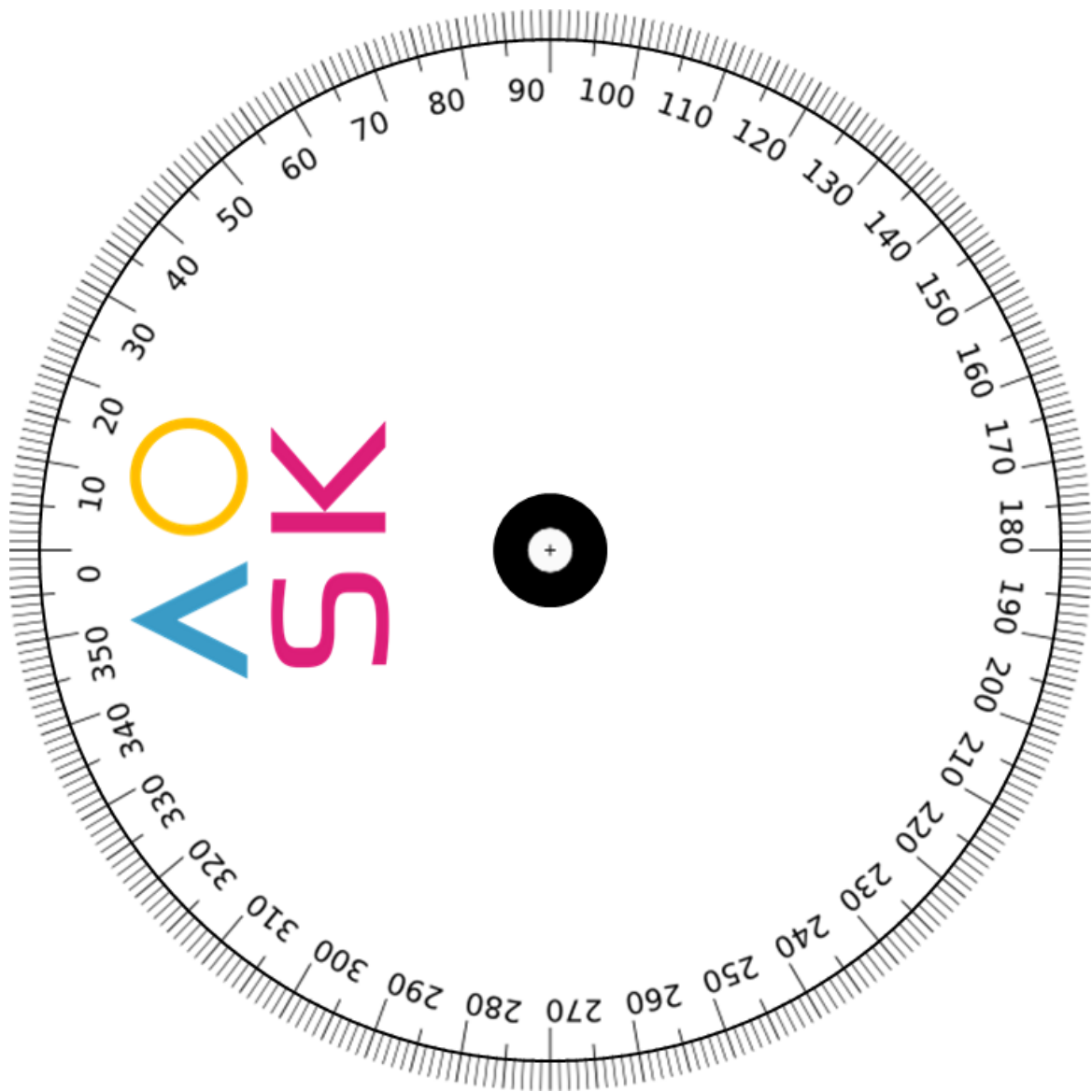
kde $d = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$.

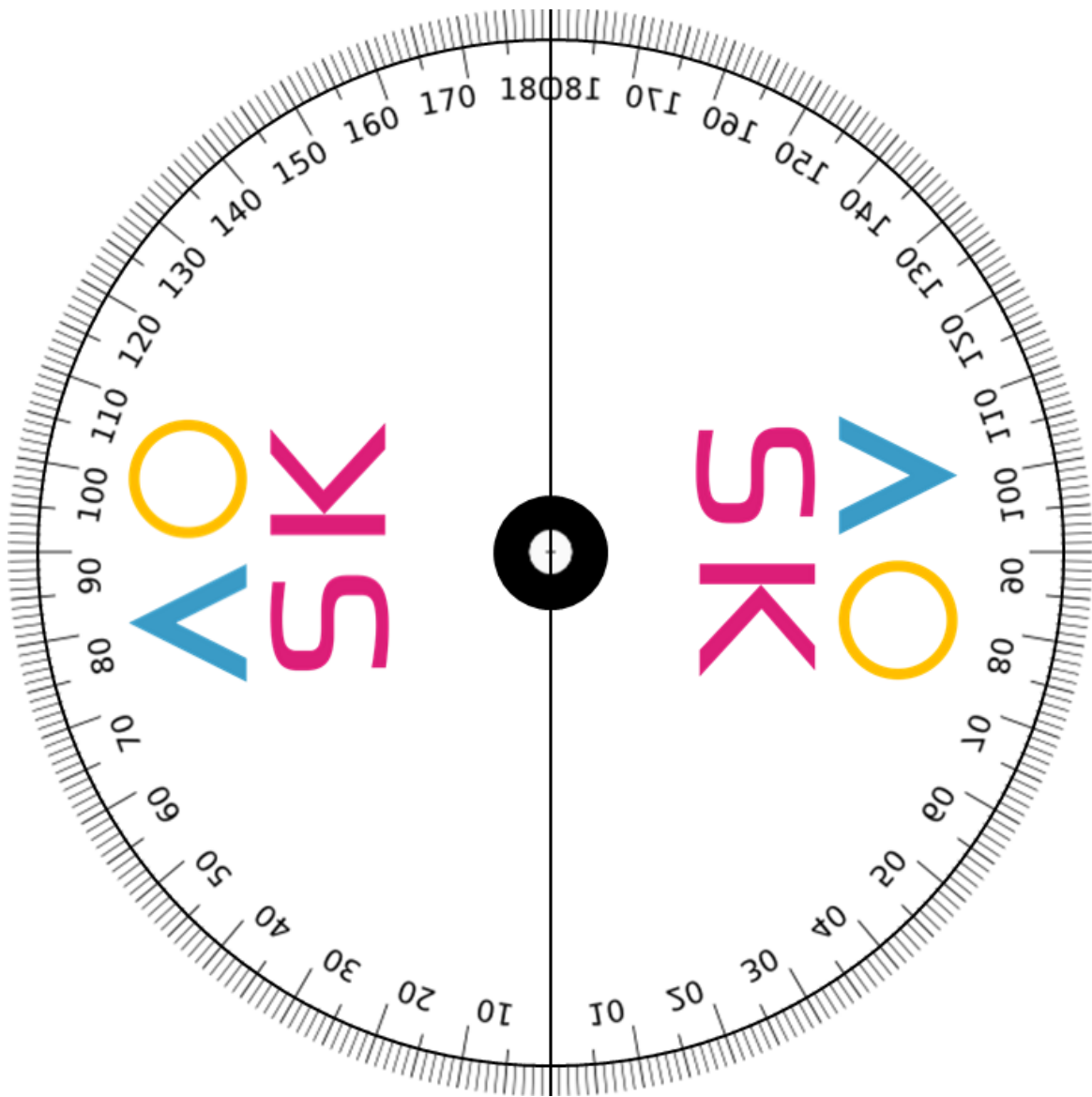
Dôležitá je informácia, že plocha celej sféry je 4π alebo 720° podľa toho, či ste mali pri výpočte vzťahu (5.3) kalkulačku nastavenú na radiány alebo stupne.

Zároveň spočítajte, koľko hviezd vidíte vo vnútri trojuholníka tvoreného danou trojicou hviezd. Teraz, keď viete počet hviezd v zlomku oblohy o známej ploche, vám už nič nebráni určení počtu hviezd na celej oblohe. Celé meranie opakujte toľkokrát, koľko uznáte za vhodné, ale odporúčané je minimálne päťkrát. Výsledky z jednotlivých meraní spojte dokopy metódou, akou uznáte za vhodné. Zároveň nezabudnite na odhad chyby na konci.

Celý proces dokumentujte a vybrané postupy odôvodnite. Zamerajte sa najmä na výber trojuholníkov, odhad vašich schopností pozorovania, meteorologické a astronomické podmienky, presnosť určenia plochy trojuholníka a spôsob spájania výsledkov viacerých meraní dokopy.

Na meranie polôh hviezd si môžete vyrobiť azimutálny stolček z priloženej grafiky. Obrázok so stupnicou $\langle 0^\circ ; 360^\circ \rangle$ je horizontálny a obrázok s dvoma stupnicami $\langle 0^\circ ; 180^\circ \rangle$ po zložení na polovicu slúži ako meradlo vo vertikálnom smere.





Zoznam konštánt (SŠ)

Základné konštanty

rýchlosť svetla vo vákuu	$c = 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$
gravitačná konštanta	$G = 6,674 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$
elementárny elektrický náboj	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$
Planckova konštanta	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}\text{ J s}$
univerzálna plynová konštanta	$\bar{R} = 8,314\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konštanta	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$
Wienova posunovacia konštanta	$b = 2,898 \cdot 10^{-3}\text{ m K}$
Hubbleova konštanta	$H_0 = 70\text{ km s}^{-1}\text{ Mpc}^{-1}$

Astronomické jednotky

stredný slnečný deň	deň = 24 h
siderický (hviezdny) deň	deň ^(sid) = 23 h 56 min 4,1 s
juliánsky rok	rok = 365,25 dní
siderický rok	rok ^(sid) = 365,2564 dní
tropický rok	rok ^(trop) = 365,2422 dní
anomalistický rok	rok ^(anom) = 365,2596 dní
astronomická jednotka	au = 149 597 870 700 m
svetelný rok	ly = 63 241 au
parsek	pc = 3,262 ly
Jansky	Jy = $10^{-26}\text{ W m}^{-2}\text{ Hz}^{-1}$

Slnko a Zem

hmotnosť Slnka	$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}\text{ kg}$
polomer Slnka	$R_{\odot} = 6,957 \cdot 10^8\text{ m}$
svietivosť (žiariivý výkon) Slnka	$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26}\text{ W}$
povrchová (efektívna) teplota Slnka	$T_{\odot} = 5772\text{ K}$
farebná teplota Slnka nad atmosférou	$T_{\odot}^{(C)} = 5900\text{ K}$
zdanlivá magnitúda Slnka	$m_{\odot} = -26,74\text{ mag}$
zdanlivá bolometrická magnitúda Slnka	$m_{\odot\text{bol}} = -26,83\text{ mag}$
absolútna magnitúda Slnka	$M_{\odot}^{(\text{mag})} = 4,83\text{ mag}$
absolútna bolometrická magnitúda Slnka	$M_{\odot\text{bol}}^{(\text{mag})} = 4,74\text{ mag}$
polomer Zeme	$R_{\oplus} = 6378\text{ km}$
hmotnosť Zeme	$M_{\oplus} = 5,9736 \cdot 10^{24}\text{ kg}$
veľká polos dráhy Zeme	$a_{\oplus} = 1\text{ au}$
excentricita dráhy Zeme	$e_{\oplus} = 0,0167$
Inklinácia rotačnej osi Zeme	$\epsilon = 23^{\circ} 26'$

Slniečná sústava

polomer Merkúru	$R_M = 2440 \text{ km}$
veľká polos dráhy Merkúru	$a_M = 0,387 \text{ au}$
polomer Venuše	$R_V = 6052 \text{ km}$
veľká polos dráhy Venuše	$a_V = 0,723 \text{ au}$
polomer Mesiaca	$R_C = 1737 \text{ km}$
veľká polos dráhy Mesiaca	$a_C = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
siderická obežná doba Mesiaca	$P_{C,si} = 27,32 \text{ dní}$
synodická obežná doba Mesiaca	$P_{C,sy} = 29,53 \text{ dní}$
inklinácia orbity Mesiaca voči ekliptike	$i_C = 5,14^\circ$
polomer Marsu	$R_\delta = 3393 \text{ km}$
veľká polos dráhy Marsu	$a_\delta = 1,524 \text{ au}$
polomer Jupitera	$R_J = 69\,911 \text{ km}$
veľká polos dráhy Jupitera	$a_J = 5,204 \text{ au}$
polomer Saturnu	$R_S = 58\,232 \text{ km}$
veľká polos dráhy Saturnu	$a_S = 9,583 \text{ au}$
polomer Uránu	$R_U = 25\,362 \text{ km}$
veľká polos dráhy Uránu	$a_U = 19,191 \text{ au}$
polomer Neptúna	$R_N = 24\,764 \text{ km}$
veľká polos dráhy Neptúna	$a_N = 30,07 \text{ au}$
polomer Pluta	$R_P = 1188 \text{ km}$
veľká polos dráhy Pluta	$a_P = 39,481 \text{ au}$

Vzťahy pre sférický trojuholník

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Sférický exces (v radiánoch):

$$E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

= plocha trojuholníka na jednotkovej sfére.

