Astronomická olympiáda

Zbierka úloh z rokov 2007 – 2023

!! β verzia !!

Chyby a pripomienky posielajte na email
`zbierka@aosk.sk`

Dátum: 30. apríla 2024

Praha, apríl 2024

Obsah

Autori príkladov

Samuel Amrich

Miroslav Gašpárek

Rudolf Gális

Ladislav Hric

Mária Hricová

Danica Jančušková

Zdeněk Komárek

Radovan Lascsák

Jozef Lipták

Martin Okánik

Dejan Prokop

Svetozár Štefeček

Jana Švrčková

Marián Vidovenec

Willie Young

Miroslav Znášik

Juraj Zverko

Zdroje prebraných príkladov

International Olympiad on Astronomy and Astrophysics (2007 – 2012)

Štefl, Kočáková, Krtička: Zbierka úloh z Astrofyziky, Brno 2010.
`https://www.physics.muni.cz/astroulohy/`

Úvod

Milí čitatelia,

konečne nastal ten čas.
Čas kedy si s búšením srdca čítate tieto riadky.
Riadky veľkolepého diela na ktoré sa čakalo 17 rokov.

Chceme vás však upozorniť, že toto dielo nie je dokonalé.
Ak sa vám niečo nebude zdať, vedzte, že chyba nemusí byť na vašej strane.
Nebojte sa. Pošlite nám vaše pripomienky a otázky na mail `zbierka@aosk.sk`.
Budeme vám, my a všetci ďalší čitatelia, veľmi vďační.
Ďakujeme.

A teraz niečo k samotnej zbierke úloh.

Rozhodli sme sa oddeliť zadania od riešení. To je však nepríjemné, ak tento dokument čítate elektronicky. Preto sme pridali hyperlinkové prepojenia. Kliknutím na názov príkladu preskočíte rovno na jeho riešenie a analogicky naspäť.

O pár strán nižšie narazíte na Zoznam konštánt. Ten obsahuje hodnoty všetkých potrebných veličín k príkladom. Ak sa k nemu budete chcieť rýchlo vrátiť, stačí kliknúť na naše malé farebné logo v hornej väčšiny strán. Ale pozor, rýchla cesta naspäť už potom neexistuje. Preto odporúčame stiahnuť si Zoznam konštánt z našej stránky aj samostatne.

V histórii slovenskej Astronomickej olympiády (AO) bolo do roku 2023 zadaných dokopy vyše 250 úloh. V našej zbierke ich narátate okrúhlych 222. Niektoré sú nenávratne stratené, zopár úlohám zmizol obrázok, či tabuľka, a objavili sa aj duplikáty (pri tých sme ponechali prvý časový výskyt danej úlohy). Snažili sme sa čo najviac príkladov zachrániť. Obrázky sme prekresľovali do TEXu a vzorové riešenia počítali a dopisovali.

Môže sa stať, že nebudete vedieť v zbierke nájsť svoj obľúbený príklad. V takom prípade skontrolujte kapitolu Rozsiahle príklady, kde sme vyčlenili príklady, ktoré obsahujú v sebe viacero oblastí. Takisto sme vyčlenili Dátovú analýzu a Praktické úlohy, avšak pozor, v tejto verzii zbierky ešte nenájdete ich riešenia.

To je všetko na úvod, hor sa do počítania!

Zoznam konštánt

Základné fyzikálne konštanty

Rýchlosť svetla vo vákuu	c	$= 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Gravitačná konštanta	G	$= 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Elementárny elektrický náboj	e	$= 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Planckova konštanta	h	$= 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Stefan-Boltzmannova konštanta	σ	$= 5{,}670 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$
Boltzmannova konštanta	k_B	$= 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Wienova posunovacia konštanta	b	$= 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
Hmotnosť elektrónu	m_e	$= 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
1 elektrónvolt	eV	$= 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$
Atómová hmotnostná konštanta	m_u	$= 1{,}661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 1\mathrm{Da}$

Astronomické konštanty

1 deň (stredný slnečný)		$= 24\,\mathrm{h}$
1 siderický deň		$= 23^\mathrm{h}\,56^\mathrm{m}\,4{,}1^\mathrm{s}$
1 tropický rok		$= 365{,}2422$ dní
1 siderický rok		$= 365{,}2564$ dní
1 anomalistický rok		$= 365{,}2596$ dní
1 astronomická jednotka	au	$= 149\,597\,870\,700\,\mathrm{m}$
1 svetelný rok	ly	$= 9{,}461 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$
		$= 63\,240\,\mathrm{au}$
1 parsek	pc	$= 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$
		$= 360/(2\pi) \cdot 60^2\,\mathrm{au}$
		$= 3{,}262\,\mathrm{ly}$
Vzdialenosť ku galaktickému centru	d_GC	$= (8{,}18 \pm 0{,}03)\,\mathrm{kpc}$
Hubblova konštanta	H_0	$= 73\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$
1 jansky	Jy	$= 10^{-26}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}}$
Vek vesmíru	t_0	$= 13{,}8 \cdot 10^9$ rokov

Ďalšie konštanty

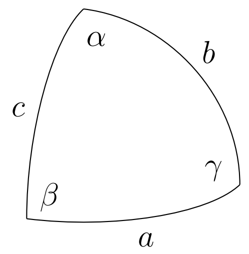
hmotnosť elektrónu		$= 0{,}511\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
hmotnosť ^{1}H		$= 938{,}27\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
hmotnosť ^{2}H		$= 1875{,}6\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
hmotnosť ^{3}He		$= 2808{,}3\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
hmotnosť ^{4}He		$= 3727{,}4\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
jednotka hmotnosti častíc	$1\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$	$= 1{,}783 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$

Sférické vzťahy

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin \gamma - \sin b \cos c \cos \alpha$$



Slnko (☉)

Hmotnosť	$M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Polomer	$R_\odot = 6{,}955 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Žiarivý výkon (svietivosť)	$L_\odot = 3{,}826 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$
Solárna konštanta (vo vzdialenosti Zeme)	$S = 1366\,\mathrm{Wm^{-2}}$
Povrchová teplota	$T_\odot = 5778\,\mathrm{K}$
Zdanlivá vizuálna magnitúda	$m_\odot = -26{,}72$
Absolútna vizuálna magnitúda	$M_{\odot,\mathrm{V}} = 4{,}82$
Absolútna bolometrická magnitúda	$M_{\odot,\mathrm{bol}} = 4{,}72$
Rotačná perióda na rovníku	$P_\odot = 25{,}4\,\mathrm{dní}$

Merkúr (M)

Hmotnosť	$M_\mathrm{M} = 3{,}3022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$
Polomer	$R_\mathrm{M} = 2440\,\mathrm{km}$
Veľká polos	$a_\mathrm{M} = 0{,}387\,\mathrm{au}$

Venuša (V)

Hmotnosť	$M_\mathrm{V} = 4{,}8673 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Polomer	$R_\mathrm{V} = 6052\,\mathrm{km}$
Veľká polos	$a_\mathrm{V} = 0{,}723\,\mathrm{au}$

Zem (⊕)

Hmotnosť	$M_\oplus = 5{,}9736 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Polomer	$R_\oplus = 6378\,\mathrm{km}$
Veľká polos	$a_\oplus = 1\,\mathrm{au}$
Inklinácia rotačnej osi	$\epsilon = 23°26'$
Excentricita	$e_\oplus = 0{,}0167$
Tiažové zrýchlenie	$g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Mesiac (☾)

Hmotnosť	$M_☾ = 7{,}4377 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
Polomer	$R_☾ = 1{,}7374 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Priemerná vzdialenosť od Zeme	$a_☾ = 3{,}844 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$

Zdanlivá vizuálna magnitúda v splne	$m_{☾}$	=	$-12{,}74$
Siderická perióda	$P_{☾,\mathrm{si}}$	=	$27{,}3217\,\mathrm{dní}$
Synodická perióda	$P_{☾,\mathrm{sy}}$	=	$29{,}5306\,\mathrm{dní}$
Inlinácia orbity voči ekliptike	$i_{☾}$	=	$5{,}14°$
Excentricita	$e_{☾}$	=	$0{,}0549$

Mars (♂)

Hmotnosť	$M_{♂}$	=	$6{,}4169 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$
Polomer	$R_{♂}$	=	$3393\,\mathrm{km}$
Veľká polos	$a_{♂}$	=	$1{,}524\,\mathrm{au}$

Jupiter (J)

Hmotnosť	M_{J}	=	$1{,}8981 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$
Polomer	R_{J}	=	$69\,911\,\mathrm{km}$
Veľká polos	a_{J}	=	$5{,}204\,\mathrm{au}$

Saturn (S)

Hmotnosť	M_{S}	=	$5{,}6834 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}$
Polomer	R_{S}	=	$58\,232\,\mathrm{km}$
Veľká polos	a_{S}	=	$9{,}583\,\mathrm{au}$

Urán (U)

Hmotnosť	M_{U}	=	$8{,}6810 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}$
Polomer	R_{U}	=	$25\,362\,\mathrm{km}$
Veľká polos	a_{U}	=	$19{,}191\,\mathrm{au}$

Neptún (N)

Hmotnosť	M_{N}	=	$1{,}0241 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}$
Polomer	R_{N}	=	$24\,764\,\mathrm{km}$
Veľká polos	a_{N}	=	$30{,}07\,\mathrm{au}$

Pluto (P)

Hmotnosť	M_{P}	=	$1{,}305 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
Polomer	R_{P}	=	$2370\,\mathrm{km}$
Veľká polos	a_{P}	=	$39{,}481\,\mathrm{au}$

Časť I

Zadania príkladov

Kapitola 1

Nebeská mechanika

1.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

1.1.1 AO 2007, úloha 1

Aká môže byť najmenšia a najväčšia vzdialenosť Merkúra,Venuše a Marsu od Zeme? Predpokladáme, že tieto planéty sa pohybujú okolo Slnka v jednej rovine po kružniciach so stredom v Slnku. Pre ktorú planétu je pomer najväčšej/najmenšej vzdialenosti najväčší?

1.1.2 AO 2007, úloha 3

Pozorovateľ na Zemi zistil, že istá planétka je v opozícii každých 665 dní. Aká je veľká polos jej dráhy?

1.1.3 AO 2008, úloha 2

Kométa na eliptickej dráhe okolo Slnka obieha najďalej 31,5 au a najbližšie 0,5 au od Slnka. Vypočítajte, aká je orbitálna perióda kométy.

1.1.4 AO 2014, úloha 5 – Obeh kométy

Kométa na eliptickej dráhe okolo Slnka obieha najďalej 61,5 au a najbližšie 0,5 au od Slnka. Vypočítajte, aká je orbitálna perióda kométy.

1.1.5 AO 2015, úloha 1 – Blízkozemský asteroid

Blízkozemský asteroid má synodickú obežnú dobu $S = 1200$ dní a excentricitu dráhy $e = 0{,}4$. Ako najbližšie sa teoreticky môže priblížiť k Zemi? Počítate s tým, že dráha asteroidu leží v rovine dráhy Zeme a dráhu Zeme považujeme za kruhovú s polomerom $r = 1\,\mathrm{au}$.

1.2 Kategória ZŠ, finále

1.2.1 AO 2007, úloha 8

Veľká polos dráhy Neptúna je 30,178 au. Určte jeho obežnú dobu P.

1.2.2 AO 2011, úloha 1

Hmotnosti Mesiaca a Zeme sú v pomere 1 : 81. Vypočítajte vzdialenosť ťažiska systému Zem – Mesiac od Zeme.

1.2.3 AO 2011, úloha 2

Určte druhú kozmickú rýchlosť, to je taká, pri ktorej raketa unikne z dosahu gravitačného pôsobenia Zeme.

1.2.4 AO 2011, úloha 3

Vypočítajte hmotnosť Slnka ak viete, že uhlová rýchlosť Zeme pri pohybe okolo Slnka je približne jeden stupeň za deň, poznáte vzdialenosť Slnko – Zem a gravitačnú konštantu.

1.2.5 AO 2012, úloha 2

Vypočítajte obežnú rýchlosť planéty Jupiter na jeho dráhe okolo Slnka v $\mathrm{km\,s^{-1}}$ za predpokladu kruhových dráh planét, ak vieme, že Jupiter má polomer dráhy 5,204 au a obehne okolo Slnka za 11,87 rokov.

1.3 Kategória SŠ, domáce kolo

1.3.1 AO 2008, úloha 5

Guľová hviezdokopa NGC 5904 má priemer 12 pc a obsahuje približne 30 000 hviezd, ktorých priemerná hmotnosť je dve hmotnosti Slnka. Vypočítajte, aká je úniková rýchlosť na okraji hviezdokopy.

1.3.2 AO 2010, úloha 6 – Asteroid

Asteroid má synodickú obežnú dobu 2,5 roka. Predpokladáme, že asteroid aj Zem obiehajú po kruhových dráhach. Vypočítajte jeho vzdialenosť od Slnka.

1.3.3 AO 2012, úloha 2

Asteroid sa pohybuje okolo Slnka po dráhe s veľkou polosou $a = 1{,}92\,\mathrm{au}$ a excentricitou $e = 0{,}75$. Vypočítajte:

(a) jeho obežnú dobu,

(b) najmenšiu vzdialenosť od Slnka,

(c) dĺžku malej polosi.

1.3.4 AO 2013, úloha 2

Určite vzdialenosť dvojhviezdy, ak poznáme jej obežnú dobu $T = 25$ rokov, hmotnosti zložiek sú $2\ M_\odot$ a $4\ M_\odot$ a veľkú poloos jej dráhy pozorujeme pod uhlom $0{,}50''$.

1.3.5 AO 2013, úloha 3

Dráha kométy má nasledovné elementy: $a = 10\,\mathrm{au}$, $e = 0{,}9$, $i = 90°$, $\Omega = 90°$, $\omega = 90°$. Dráhu Zeme považujme za kružnicu s $r = 1\,\mathrm{au}$. Ako ďaleko je kométa od Zeme, ak sa nachádza v perihéliu svojej dráhy?

1.3.6 AO 2016, úloha 1 – Asteroidy v Slnečnej sústave

Dva asteroidy obiehajú okolo Slnka a majú rovnaký čas prechodu perihéliom. Osi ich dráh sú na seba kolmé. Pre a a e oboch asteroidov platí: $a_1 = 2{,}5\,\mathrm{au}$, $e_1 = 0{,}4$, $a_2 = 3\,\mathrm{au}$, $e_2 = 0{,}3$.

Vypočítajte ich vzájomnú vzdialenosť, ak sú oba súčasne v perihéliu.

1.3.7 AO 2017, úloha 4 – Dvojhviezdny systém

Vzdialenosť dvojhviezdy je 10 pc, najväčšia uhlová separácia zložiek je 7,0″ a najmenšia je 1,0″. Predpokladajme, že orbitálna perióda je 100 rokov a orbitálna rovina je kolmá k zornému lúču. Ak hlavná polos dráhy jednej zložky je rovná 3,0″, čiže $a_1 = 3{,}0''$, potom určte hmotnosti obidvoch zložiek v jednotkách hmotnosti Slnka.

1.3.8 AO 2019, úloha 3 – Umelá družica Zeme

Určte dobu obehu umelej družice Zeme, keď najvyšší bod jej obežnej dráhy je 5000 km a najnižší bod 300 km nad povrchom Zeme.

1.3.9 AO 2023, úloha 4 – JWST

Ďalekohľad Jamesa Webba je najväčší teleskop vo vesmíre. Má hmotnosť $m = 6160\,\mathrm{kg}$ a zrkadlo s priemerom $D = 6{,}5\,\mathrm{m}$. Špecializuje sa na pozorovanie v infračervenej oblasti spektra na vlnových dĺžkach od $\lambda_{\mathrm{min}} = 600\,\mathrm{nm}$ do $\lambda_{\mathrm{max}} = 28\,300\,\mathrm{nm}$. Bol vypustený koncom roku 2021 a po mesiaci sa usadil na dráhu, ktorá sa pohybuje v blízkosti Lagrangeovho bodu L2. To znamená, že si voči Zemi zachováva relatívnu polohu.

Uvažujte, že Zem aj JWST obiehajú po kruhových dráhach okolo Slnka a JWST sa nachádza presne v bode L2. Polomer dráhy Zeme je r. JWST obieha vo vzdialenosti $d = 1{,}5 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ od Zeme smerom od Slnka.

Úlohy:

(a) Nakreslite schému dráh Zeme a JWST okolo Slnka. Vyznačte r a d.

(b) Aké gravitačné sily pôsobia na JWST od Zeme a od Slnka?

(c) Koľkokrát väčšia je gravitačná sila pôsobiaca od Slnka? Aká je výsledná gravitačná sila pôsobiaca na JWST?

(d) Ako rýchlo sa musí JWST pohybovať, aby sa udržal na kruhovej dráhe?

(e) Ako dlho trvá JWST obeh okolo Slnka? Použite výsledok z (d). Porovnajte so Zemou.

1.4 Kategória SŠ, finále

1.4.1 AO 2007, úloha 2

Určite, kedy trvá úplné zatmenie Mesiaca dlhšie – keď je Mesiac v apogeu, alebo v perigeu. Počítajte, že Zem je od Slnka vzdialená 1 au. Zem, Mesiac i Slnko považujte za guľové. Zatmenie považujte za centrálne, t.j. Mesiac prechádza stredom tieňa Zeme. (Pre výpočet obvodovej rýchlosti Mesiaca v apogeu/perigeu využite zákon zachovania momentu hybnosti.)

1.4.2 AO 2007, úloha 7

Okolo hviezdy s hmotnosťou 10^{30} kg obieha planéta s hmotnosťou 10^{25} kg vo vzdialenosti 100 miliónov km. Vypočítaj, akou rýchlosťou sa pohybuje planéta pri svojom obehu okolo centrálnej hviezdy.

1.4.3 AO 2008, úloha 2 – Slapové pôsobenie Mesiaca

Slapové pôsobenie Mesiaca na Zem zapríčinilo spomalenie zemskej rotácie a tým zníženie rotačného uhlového momentu Zeme. Toto zníženie sa nahradilo zvýšením dráhového uhlového momentu Mesiaca okolo Zeme. Dĺžka pozemského dňa v dôsledku tohto vplyvu vzrástla za posledných 3800 rokov o 0,1 s. Vypočítajte, o koľko ďalej od Zeme je Mesiac dnes ako bol pred 3800 rokmi. Použite moment zotrvačnosti okolo rotačnej osi $I_Z = 0{,}33\, M_\oplus\, R_\oplus^2$.

1.4.4 AO 2009, úloha 1 – Umelá družica Zeme

Určite dobu obehu umelej družice Zeme, keď najvyšší bod jej obežnej dráhy je 5000 km a najbližší bod 300 km. Pri riešení môžete použiť nasledujúce konštanty: polomer Zeme, obežnú dobu Mesiaca okolo Zeme, obežnú dobu Marsu okolo Slnka, polomer Mesiaca, polomer Marsu, strednú vzdialenosť Mesiaca od Zeme a strednú vzdialenosť Marsu od Slnka.

1.4.5 AO 2009, úloha 4 – Dvojitý asteroid

V prázdnom priestore krúžia okolo seba dva balvany vo vzdialenosti 1 m. Každý má hmotnosť 5 kg. Vypočítajte periódu obehu.

1.4.6 AO 2010, úloha 1

Raketám vypúšťaným zo Zeme, musíme udeliť rýchlosť $7{,}9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ rovnobežne s povrchom, aby sa stali družicami Zeme. Táto rýchlosť sa nazýva prvá kozmická rýchlosť. Uvažujme, že na asteroide, ktorý má tvar gule a má hustotu rovnakú ako je priemerná hustota Zeme ($\rho = 5500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$), je prvá kozmická rýchlosť $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Človek na Zemi dokáže bežať rýchlosťou $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Predpokladajme, že človek (astronaut) dokáže bežať touto rýchlosťou aj na asteroide. Teda ak sa kozmonaut na asteroide takto rozbehne a odrazí, ako napríklad pri skoku do diaľky, nemusí už na asteroid dopadnúť a môže ostať „lietať“ okolo neho nad jeho povrchom. Aký je polomer tohto asteroidu?

1.4.7 AO 2010, úloha 2

Dvojhviezda s obežnou dobou 10 dní má zložky o hmotnostiach $10\,M_\odot$ a $2\,M_\odot$. Menej hmotná zložka je pulzarom, ktorý má pulzačnú periódu $0{,}1\,\mathrm{s}$. Zistite, v akom intervale sa mení pozorovaná perióda pulzácií. Predpokladajte kruhovú dráhu so sklonom 90°, to znamená, že pozorovateľ sa nachádza v rovine dráhy dvojhviezdy.

1.4.8 AO 2014, úloha 5 – Dvojhviezda

Určte vzdialenosť dvojhviezdy, ak poznáme jej obežnú dobu $T = 27$ rokov, hmotnosti jednotlivých zložiek $3\,M_\odot$, $5\,M_\odot$ a veľkosť hlavnej polosi $\alpha = 0{,}45''$.

1.4.9 AO 2015, úloha 5

Pristávací modul s astronautom pristál na povrchu sférického asteroidu, ktorého priemer je $2{,}2\,\mathrm{km}$ a špecifická hustota $2{,}2\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Rotácia asteroidu je zanedbateľná. Astronaut sa rozhodne, že obíde celý asteroid pozdĺž rovníka za 2,2 hodiny. Dokáže to?

1.4.10 AO 2015, úloha 6

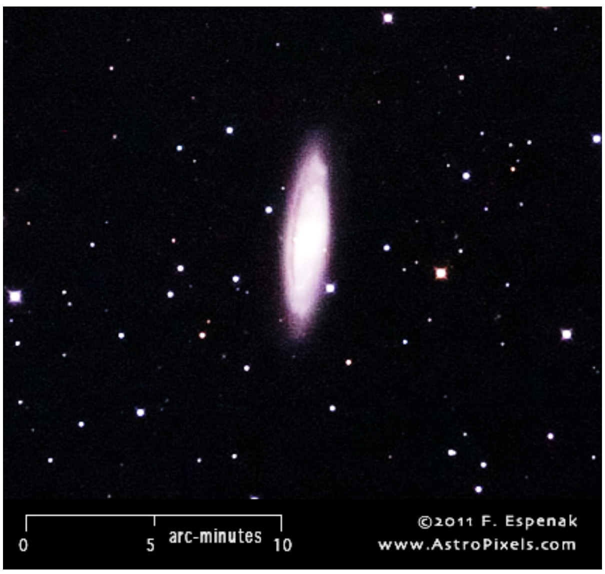
Vypočítajte o koľko sa zväčší polomer zemskej dráhy ako výsledok straty hmotnosti Slnka v dôsledku termonukleárnych reakcií prebiehajúcich v jeho jadre za 100 rokov. Predpokladáme, že dráha Zeme okolo Slnka je počas tohto obdobia kruhová.

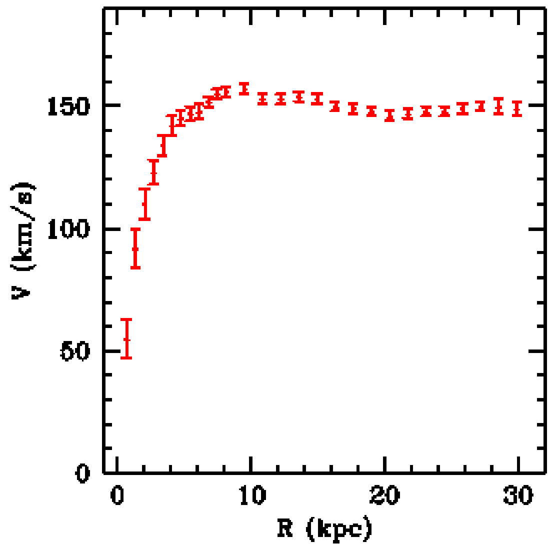
1.4.11 AO 2016, úloha 5

Predpokladáme, že prachové zrnká sú absolútne čierne telesá. Určite priemer prachového zrnka guľového tvaru, ktoré vo vzdialenosti 1 au od Slnka je v rovnováhe medzi silou tlaku žiarenia a gravitačnou silou Slnka. Počítajte s hustotou prachového zrnka $\rho = 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

1.4.12 AO 2019, úloha 3 – Rotačné krivky galaxií

Rotačná krivka galaxie je závislosť rýchlosti rotácie od vzdialenosti od stredu, značené $v(r)$. V tejto úlohe sa pozrieme na rotačné krivky galaxií a na niektoré teórie, ktoré sa snažia vysvetliť ich neočakávané tvary. Dominantnou teóriou vysvetľujúcou túto nezrovnalosť je prítomnosť tzv. tmavej hmoty. Jedná sa o exotické častice neinteragujúce s okolím elektromagneticky (napr. svetlo) ale iba gravitačne. Alternatívne teórie (MOND – Modified Newtonian Dynamics) navrhujú, že v skutočnosti sú to samotné zákony fyziky, ktoré musia byť pozmenené pri veľmi slabých poliach.
Predstavme si fiktívnu galaxiu, v ktorej strede sedí čierna diera s hmotnosťou $M = 8 \cdot 10^7\,M_\odot$. Obklopuje ju sférická centrálna oblasť (halo) s konštantnou hustotou $\rho_0 = 0{,}2\,M_\odot\,\mathrm{pc}^{-3}$ s polomerom $r_0 = 5\,\mathrm{kpc}$. Hmotnosť všetkých vonkajších častí v prvom priblížení zanedbáme, vidíme ale, že hviezdy obiehajú centrum galaxie v tenkom disku. Vzdialenosť je $d = 10{,}7\,\mathrm{Mpc}$, radiálna rýchlosť je $v_{\mathrm{rad}} = 807\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.





Zdroj krivky: `http://w.astro.berkeley.edu/~mwhite/darkmatter/rotcurve.html`

Poznámka: v skutočnosti ide o M65, ale nasledujúce údaje sú vymyslené.

Úlohy:

(a) Určte rotačnú krivku $v(r)$ pre túto galaxiu a urobte hrubý náčrt ukazujúci jej správanie pre vzdialenosť r od stredu po 10 kpc. Vypočítajte rotačnú rýchlosť pre okraj hala ($r = r_0$) a vzdialenosť 10 kpc ($r = 2r_0$).

(b) Predstavte si teraz, že naša skúmaná galaxia je zobrazená na obrázku č. 1. Aký je viditeľný polomer tejto galaxie v kpc? Ďalej určte najvyššiu a najnižšiu vlnovú dĺžku vodíkovej čiary Hα s laboratórnou hodnotou 656,28 nm meranú z objektov v rovine disku (a pozdĺž veľkej osi na obrázku).

(c) Skutočné rotačné krivky vyzerajú skôr ako tá na obrázku č. 2. Určite tvar závislosti hustoty sférického oblaku tmavej hmoty od vzdialenosti $\rho(r)$ potrebnú na pozorovanie plochej rotačnej krivky. Stačí určiť mocninu n vo vzťahu $\rho(r) = kr^n$, kde k je konštanta. Hmotnosť klasickej hmoty môžete zanedbať.

Podľa teórie modifikovanej dynamiky treba do Newtonovho zákona sily pridať korekčný člen

$$F = qma \quad ; \quad q = \left(1 + \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

kde a_0 je zrýchlenie pri ktorom začínajú prevládať MOND efekty. V prípade správnosti teórie by sa jednalo o dôležitý parameter v kozmológii.

(d) Ukážte, že vzťah medzi vonkajšou silou a zrýchlením bude pre $a << a_0$ mať tvar

$$F = m\frac{a^2}{a_0} ,$$

a že táto rovnica vie vysvetliť ploché rotačné krivky za okrajom galaxie. Uvažujte platnosť klasického vzorcu pre gravitačnú interakciu. Nájdite hodnotu a_0 pre $v = 150\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (obrázok č. 2) a hmotnosť $1 \cdot 10^{11}\, M_\odot$.

Pomôcka:

Tieto vzťahy možno použiť pre všetky sféricky symetrické rozloženia hmoty $M(r)$: všetka hmotnosť vnútri gule s polomerom R pôsobí na časticu na jej okraji tak, ako keby bola všetka táto hmotnosť v hmotnom bode v strede gule. Všetka hmotnosť vo vzdialenosti väčšej ako R na časticu nepôsobí (jej celkové pôsobenie sa presne vyruší).

1.4.13 AO 2021, úloha 4 – Gravitačný kolaps a čierne diery

V úlohách (a) – (c) uvažujte hviezdu podobnú Slnku.

(a) Akou rýchlosťou musí letieť vesmírna loď na stabilnej kruhovej dráhe okolo hviezdy vo vzdialenosti $a = 5 \cdot 10^7$ km od jej stredu? Aký veľký impulz (zmena hybnosti) a v ktorom smere treba udeliť lodi s hmotnosťou $m = 100$ t, aby sme docielili jej radiálny pád na povrch hviezdy?

(b) Odvoďte trvanie takéhoto pádu. Najskôr odvoďte výsledok bez bezrozmerného faktora pomocou rozmerovej analýzy. Potom začnite uvažovať fyziku a odvodťe celý výsledok. Pre účely tohto výpočtu považujte hviezdu za hmotný bod v strede. Z pohybovej rovnice a Newtonových zákonov by si takýto výpočet vyžadoval zložitú matematiku. Skúste teda radšej porozmýšľať nad rôznymi limitnými prípadmi kužeľosečiek.

(c) Na základe vyššie uvedeného rádovo odhadnite tzv. dynamickú časovú škálu (čas gravitačného kolapsu) Slnku podobnej hviezdy. Predstavujme si, že toto je zhruba čas, za aký skolabuje hviezda na čiernu dieru. Skúste vymenovať čo najviac aproximácii / nie celkom správnych predpokladov pri takomto odhade založenom na výsledku z (b).

(d) Loď s astronautom je na orbite okolo čiernej diery so Schwarzschildovým polomerom $R_S = 1\,\mathrm{m}$. Polomer dráhy je 10^9 metrov. Aká je obežná doba a taktiež gravitačný červený posun (meraný pozorovateľom v nekonečne)? Načrtnite závislosť červeného posunu na polomere dráhy a okomentujte jeho limitné prípady. Dáva to zmysel?

1.4.14 AO 2022, úloha 2 – Tmavé Slnko

Tmavá hmota je hypotetická látka, ktorá takmer neinteraguje s normálnom hmotou. Jediný spôsob interakcie je gravitácia (podľa klasického Newtonovho gravitačného zákona). Predstavme si, že by bolo naše Slnko z tmavej hmoty. Uvažujme guľu (tmavé Slnko) kompletne vyrobenú z tmavej hmoty v ktorej je hmotnosť rozložená podľa funkcie

$$M(r) = M_\odot \frac{r}{R_\odot}\,,$$

kde $M(r)$ je hmotnosť koncentrickej gule s polomerom r (guľa, ktorá má stred v strede tmavého Slnka). Keďže rozloženie hmoty je sféricky symetrické, tak (podľa Gaussovho zákona) na objekt vnútri tmavého Slnka ($r < R_\odot$) pôsobí gravitácia ekvivalentná gravitácii hmoty uloženej vo sfére pod objektom, teda gravitácia gule s polomerom r.

Predstavme si, že vnútri tmavého Slnka obieha sonda na kruhovej dráhe s polomerom $r = R_\odot/2$.

Úlohy:

(a) Aká je obehová rýchlosť v sondy?

(b) Aká je perióda T obehu sondy?

(c) Prežil by človek zdanlivé zrýchlenie a na palube sondy?

Teraz si predstavme, že sonda zapla motory v radiálnom smere, a začala sa postupným špirálovaním hýbať k povrchu Slnka. Pri tom si udržiavala konštantnú radiálnu rýchlosť $v_\mathrm{R} = 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

(d) Ako dlho (čas t) bude sonda putovať k povrchu?

(e) Akú rýchlosť v_p bude mať sonda v momente kedy dosiahne povrch?

V momente ako sonda dosiahla povrch Slnka, tak vypla motory. Stále jej však ostala radiálna rýchlosť v_R, takže vyletela nad povrch, chvíľu letela nad ním, a potom bola gravitáciou stiahnutá naspäť do Tmavého Slnka.

(f) Aká je maximálna výška h nad povrchom, ktorú sonda dosiahne?

(g) Ako dlho (čas Δt) sa sonda udrží nad povrchom?

Pomôcka:

Všimnite si, že výška $h \ll R$, teda gravitačnú silu nad povrchom môžete aproximovať konštantnou hodnotou $F_\mathrm{g}(r = R)$ pre $r \in (R, R + h)$.

1.4.15 AO 2023, úloha 1 – Netradičné orbitálne dráhy

Riešenie dráh v nebeskej mechanike môže niekedy viesť k zaujímavým výsledkom. V tejto úlohe sa pozrieme práve na jedno konkrétne riešenie. Predstavte si hypotetickú slnečnú sústavu kde je iba Slnka, Zem a Mesiac obiehajúci okolo Zeme. Jednotlivé hmotnosti sú $M_\odot$ pre Slnko, $M_\oplus$ pre Zem a $M_☾$ pre Mesiac.

Konštanty a aproximácie:

Vzdialenosť Zem-Mesiac ku Slnko-Zem	$r_☾ = \frac{7}{45} r_\oplus$
Obežná perióda Mesiaca ku Zeme	$P_☾ = \frac{1}{3} P_\oplus$
Podmienka úlohy	$M_\odot \gg M_\oplus \gg M_☾$
Binomická aproximácia	$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx\,,\ \ x \ll 1$

Úlohy:

(a) Overte, že pre dané vstupné parametre stále platí podmienka úlohy (na hmotnosti). Zamyslite sa, ako je potrebné overiť dvojitú nerovnicu $M_\odot \gg M_\oplus \gg M_☾$. Hint: za $\gg$ sa dá považovať ak je jedno číslo aspoň o rád väčšie ako druhé.

(b) Odvoďte vzťah pre polomer Hillovej sféry okolo Zeme a overte či sa Mesiac v nej nachádza. Pokúste sa umiestniť testovaciu časticu na hranicu Hillovej sféry okolo Zeme.

(c) Nakreslite tvar orbity Mesiaca vo vzťažnej sústave Slnka. Pokúste sa o čo najlepšie rysovanie. Je potrebné vyniesť minimálne 8 bodov dráhy. Na aký tvar sa daná dráha podobá?

Kapitola 2

Geometria a čas

2.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

2.1.1 AO 2008, úloha 3

Planétka, na ktorej má svoje sídlo Malý princ je takmer dokonalá guľa. Malý princ zistil, že presne v tom okamihu, keď Slnko svieti úplne kolmo zhora na jeho jediný baobab, svieti pod uhlom 10° na jeho milovanú ružu, rastúcu vo vzdialenosti 6,28 km od baobabu. Vypočítajte, aký polomer má planétka Malého princa.

2.1.2 AO 2008, úloha 4

ET Mimozemšťan na planéte X pozoruje po západe Slnka na večernej oblohe Zem a vedľa nej Mesiac v elongácii. Vzdialenosť medzi Zemou a Mesiacom je v ten večer 389 000 km . Na milimetrovom pravítku, ktoré drží vo vzdialenosti pol metra od oka nameria ET zdanlivú vzdialenosť Mesiaca od Zeme 20 mm. Vypočítajte vzdialenosť planéty X od Zeme.

2.1.3 AO 2008, úloha 5

Časový interval medzi poludním 1. júla a poludním 31. decembra je 183 slnečných dní. Vypočítajte, koľko je to siderických dní.

2.1.4 AO 2008, úloha 6

Najväčšia uhlová vzdialenosť medzi Venušou a Slnkom pri pozorovaní zo Zeme je 46°. Vypočítajte polomer kruhovej dráhy Venuše v au, ak sa v čase tohto pozorovania Zem nachádzala v strednej vzdialenosti od Slnka.

2.1.5 AO 2014, úloha 1 – Nafúknutie Zeme v Sci–Fi

Predpokladajme, že naša Zem sa nafúkne tak, že jej polomer sa zdvojnásobí. Rôzne body na povrchu Zeme sa tak od seba vzdialia.

(a) Ako ďaleko budú na nafúknutej Zemi mestá Košice a Bratislava, keď na normálnej Zemi je ich vzdialenosť 400 km?

(b) Ako by sa zmenila rozloha Slovenska, keď na normálnej Zemi je jeho rozloha približne 49 000 km^2?

2.1.6 AO 2014, úloha 2 – Jupiter a jeho mesiac Európa

Aký uhlový rozmer má pri opozícii Jupitera so Slnkom na našej oblohe mesiac Európa? Pomôžte si zjednodušeniami: Mesiac obieha po kruhovej dráhe okolo Zeme a jeho skutočný priemer je rovnaký ako má Európa. Dráhu Zeme aj Jupitera považujme za kruhovú. Vzdialenosť Európy od Jupitera zanedbajte. Pomôžte si nákresom.

2.1.7 AO 2015, úloha 2 – Ročná paralaxa

Ročná paralaxa Barnardovej hviezdy je $\pi = 0{,}545''$ Určte jej vzdialenosť od Slnka v parsekoch, svetelných rokoch a v au.

2.1.8 AO 2015, úloha 5 – Rádiolokácia

Zo Zeme bol vyslaný radarový signál, ktorý sa po odraze od planéty vrátil na Zem, kde sme zaznamenali čas medzi vyslaním a prijatím signálu. Tento postup bol zopakovaný niekoľko krát, pričom signál bol vyslaný na rôzne planéty, ktoré sa nachádzali v rôznych pozíciách vzhľadom na Zem a Slnko. Doplňte nasledujúcu tabuľku:

Planéta	Doba medzi odoslaním a prijatím signálu	Aspekt planéty	Vzdialenosť planéty od Zeme
Merkúr	930 s		
Mars		opozícia	
Venuša			0,28 au
Jupiter		kvadratúra	
Urán			20,2 au

Dráhy planét predpokladajte kruhové. Zanedbajte rotáciu planét a môžete použiť polomery dráh planét zo zoznamu konštánt.

2.1.9 AO 2016, úloha 1 – Kulminácia hviezd

V ktorej zemepisnej šírke a pre hviezdy s akou deklináciou platí, že ich horná kulminácia je v zenite a dolná kulminácia na horizonte? Môžete nakresliť aj obrázok.

2.1.10 AO 2016, úloha 2 – Planéty v Slnečnej sústave

Vypočítajte vzájomnú vzdialenosť Venuše a Marsu, ak je Venuša (pri pohľade zo Zeme) v najväčšej západnej elongácii (od Slnka) a Mars je v západnej kvadratúre. Uvažujte, že planéty obiehajú v jednej rovine po kruhových dráhach.

2.2 Kategória ZŠ, finále

2.2.1 AO 2007, úloha 1

V priestore kozmickej lode v beztiažovom stave sa vznáša „kvapka“ vody tvaru gule s polomerom 1 cm. Nárazom na stenu lode sa kvapka rozpadne na viacero rovnako veľkých guličiek s polomerom 0,5 cm. Na koľko guličiek sa rozpadne?

2.2.2 AO 2007, úloha 2

Predpokladajme, že Zem a Mars sa pohybujú okolo Slnka v jednej rovine po kružniciach so stredom v Slnku. Aká je vzdialenosť Marsu od Zeme v čase, keď spojnice Slnko-Zem a Mars-Zem zvierajú pravý uhol (Mars je v kvadratúre)?

2.2.3 AO 2007, úloha 7

Ročná paralaxa Barnardovej hviezdy je $\pi = 0{,}545''$. Určte jej vzdialenosť od Slnka v parsekoch (pc), svetelných rokoch (ly) a astronomických jednotkách (au).

2.2.4 AO 2009, úloha 1 – Kulminácia Mesiaca dnes a zajtra

Dnes Mesiac kulminuje o 22:00 nad južným obzorom. Kedy sa horná kulminácia Mesiaca zopakuje zajtra? Zanedbajme pohyb Zeme okolo Slnka. Dráhu Mesiaca okolo Zeme považujme za kruhovú.

2.2.5 AO 2010, úloha 1

Od okamihu poludnia - 1. júla po okamih poludnia - 31. decembra uplynie 183 slnečných dní. Vypočítajte, koľko je to siderických dní.

2.2.6 AO 2013, úloha 4

V diele K. Ptolemaia je o.i. odkaz na jedno pozorovanie úplného zatmenia Mesiaca, asi najstaršie presne zaznamenané pozorovanie:

V 27. roku Nabonassara, v noci z 29. na 30. dňa mesiaca Thot začalo hodinu po východe Mesiaca v Babylone zatmenie Mesiaca a bolo úplné... Prevod do Juliánskeho kalendára dáva pre stred zatmenia v Babylone, $\lambda = 44°25'$ E, 19. marec 721 p.n.l., 21:00 hod. miestneho času. Posledné u nás pozorovateľné úplné zatmenie Mesiaca nastalo: 15. 6. 2011 so stredom o 20:14 UT. Zistite strednú synodickú periódu Mesiaca za toto obdobie!

Pozor! Pri výpočte zohľadnite, že každý štvrtý rok bol priestupný, okrem rokov 1700, 1800 a 1900. Tiež si uvedomte, že po štvrtku 4. októbri 1582 nasledoval piatok 15. október (tzv. Gregoriánska reforma), 10 dní medzi týmito dátami neexistuje. Rovnako neexistuje rok 0, pred rokom 1 n.l. bol rok 1 pred n.l.

2.2.7 AO 2014, úloha 4 – Veľkonočná nedeľa

Veľkonočná nedeľa (v západnom kresťanstve) je prvá nedeľa, nasledujúca po prvom splne cyklického Mesiaca, nasledujúcom po 21. marci Gregoriánskeho kalendára. V roku 2014 pripadá takýto spln na 14. apríla a Veľkonočnou je nedeľa 20. 4. 2014. Vypočítajte, ktorý deň bude Veľkonočnou nedeľou v roku 2015.

2.3 Kategória SŠ, domáce kolo

2.3.1 AO 2007, úloha 2

Jupiter a jeho štyri najväčšie mesiace zohrali v histórii vedy významné úlohy. Ich objav, ktorý uskutočnil Galileo Galilei v roku 1609, predstavoval významný argument pre heliocentrické učenie. Koncom 17. storočia sa Olaf Rőmer pokúsil určiť rýchlosť svetla s využitím výsledkov pozorovania zatmení týchto satelitov. Sledovanie týchto úkazov sa uplatnilo aj pri určovaní zemepisnej dĺžky v námornej doprave.

Zaujímavými javmi tejto kategórie sú aj prechody mesiacov resp. ich tieňov popred kotúčik Jupitera. Samotný mesiac je síce pred diskom Jupitera vďaka nízkemu kontrastu ťažko pozorovateľný, ale jeho tieň sa javí ako výrazná čierna škvrnka, ktorú za priaznivých podmienok zbadáme už pri 100-násobnom zväčšení. Dokonca nastávajú aj také situácie, že tieň opúšťa disk materskej planéty, ale mesiac samotný sa ešte nedotkol okraja Jupitera. Pri riešení nasledovných úloh využijeme určité zjednodušenia, ktoré však výsledok nezaťažia veľkou nepresnosťou. Zanedbáme sklon obežnej roviny mesiaca Io voči rovníku Jupitera, budeme uvažovať, že táto rovina zároveň prechádza stredom Zeme. Dráhy všetkých telies (Zem, Jupiter, mesiac Io) okolo Slnka resp. Jupitera považujeme za kružnice.

Veľká polos Io je $a_{\mathrm{Io}} = 4{,}217 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$, a siderická obežná doba $P_{\mathrm{Io}} = 42{,}5\,\mathrm{h}$.

(a) Načrtnite polohy Jupitera a Zeme voči Slnku, pri ktorej sú mesiac Io a jeho tieň v projekcii na disk Jupitera od seba najvzdialenejšie. Ako tieto aspekty Jupitera z hľadiska pozorovateľa na Zemi nazývame?

(b) Určte vzdialenosť mesiaca Io a jeho tieňa v projekcii na kotúč Jupitera z predošlej úlohy v jednotkách polomerov planéty Jupiter.

(c) V akom poradí nastáva vstup mesiaca a jeho tieňa pri zmieňovaných aspektoch? Vypočítajte časový interval medzi nimi.

2.3.2 AO 2009, úloha 5 – Hviezda Toliman

(a) Od ktorej rovnobežky južne je už vidieť k Slnku blízku hviezdu Toliman ($\alpha = 14^{\mathrm{h}}\,39^{\mathrm{m}}\,35^{\mathrm{s}}$, $\delta = -60^{\mathrm{h}}\,50^{\mathrm{m}}\,15^{\mathrm{s}}$) vychádzať nad horizont?

(b) Ktorý deň v roku 2009 táto hviezda kulminuje nad južným obzorom práve o polnoci miestneho času pre pozorovateľa na poludníku Kapského Mesta ($33°58'36''$ S, $18°25'28''$ E)?

(c) Určte na tomto poludníku taký bod, kde je Toliman o polnoci miestneho času priamo v zenite.

2.3.3 AO 2010, úloha 2 – Vega v Lýre

(a) Ako dlho trvá svetlu cesta z Vegy na Zem, ak jej ročná paralaxa je $0{,}11''$?

(b) Koľko rokov by sme museli letieť k Vege rýchlosťou $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, aby sme sa dostali k nej na polovičnú vzdialenosť?

2.3.4 AO 2011, úloha 5

Predpokladajme, že Zem je guľa. Pozorovateľ, ktorý by sa nachádzal na zemskej osi nad severným pólom, by mohol sledovať časť povrchu Zeme ohraničenú určitou rovnobežkou severnej zemepisnej šírky podľa toho, ako vysoko nad pólom by sa nachádzal. Čím vyššie by sa nachádzal, tým väčšiu časť zemského povrchu by mohol sledovať. Teoreticky pri nekonečnej vzdialenosti by mohol sledovať celú severnú pologuľu.

(a) V akej minimálnej výške nad severným pólom Zeme by sa musela nachádzať kozmická loď, aby astronauti z nej mohli sledovať územie Slovenska (cca 49° severnej zemepisnej šírky)?

(b) Ak sú astronauti v kozmickej rakete 300 km nad severným pólom, ktorá rovnobežka severnej zemepisnej šírky im ohraničuje pozorovateľnú časť Zeme (obzor)?

2.3.5 AO 2012, úloha 4

Vďaka atmosférickej refrakcii, ktorá na horizonte dosahuje hodnotu $34'$, nebeský objekt, ktorý by vôbec nevyšiel nad obzor v danom mieste na Zemi, naopak celú noc nezapadne. Na akých zemepisných šírkach sa toto môže prihodiť?

2.3.6 AO 2013, úloha 1

Na prelome druhej a tretej dekády novembra sa Matúš dlho do noci pripravoval na astronomickú olympiádu. Keď skončil, pozrel sa ešte na oblohu a zašomral si „Sírius práve kulminuje“. Bez použitia známych vzorcov a otáčavej mapy oblohy odhadnite, s presnosťou na pol hodiny, koľko bolo vtedy hodín. Súradnice Síria pre ekvinokcium 2000 sú: $\alpha = 6^{\mathrm{h}}\,45^{\mathrm{m}}$, $\delta = -16°55'$. Napíšte úvahu pomocou ktorej ste k výsledku dospeli.

2.3.7 AO 2013, úloha 5

Okolo hviezdy 58Tuc (spektrálna trieda A0V s hmotnosťou $2\,M_\odot$) obieha planéta ADAM (obiehajúca retrográdne vo vzdialenosti 0,7 au so siderickou rotačnou dobou iba 6 hodín). Vypočítajte, koľko trvá solárny deň na planéte ADAM s hmotnosťou 2x väčšou, ako má Jupiter, za predpokladu, že planéta rotuje retrográdne. Koľko by trval, ak by rotácia planéty bola prográdna?

2.3.8 AO 2014, úloha 1 – Neznáma planéta

Astronaut pristál na neznámej planéte. Bola taká veľká, že sa dala porovnať s mnohými už známymi telesami v slnečnej sústave. Mala takmer dokonalý guľový tvar. Astronaut sa po nej vydal na prvú výskumnú výpravu. Keď po povrchu prešiel 200 km smerom k severnému rotačnému pólu, spozoroval, že tamojšia „Polárka“ (hviezda blízko severného svetového pólu) zväčšila svoju výšku o 5°. Astronaut si vypočítal aká veľká je planéta, na ktorej pristál. Vypočítajte polomer planéty a nakreslite príslušný obrázok.

2.3.9 AO 2014, úloha 2 – Zem pri pohľade z družice

Z akej výšky h (v km) nad povrchom môže umelá družica Zeme zobraziť presne polovicu povrchu plochy privrátenej pologule našej planéty? Zem považujte za dokonalú guľu bez atmosféry s polomerom 6378 km.

2.3.10 AO 2016, úloha 3 – Dvojhviezdna sústava

Predstavte si, že hviezdy určitej dvojhviezdnej sústavy majú rovnakú hmotnosť (a celkovo ich môžeme považovať za identické) a obiehajú okolo spoločného ťažiska. V tomto ťažisku sa nachádza exoplanéta Utópia na ktorej žijú inteligentní obyvatelia. Týmto obyvateľom sa podarilo zistiť, že siderická perióda rotácie ich planéty je $T_\mathrm{U} = 4{,}0\,\mathrm{h}$ a siderická perióda vzájomného obehu danej dvojhviezdnej sústavy (mená hviezd sú Paradisa a Inferna v jazyku Utópčanov) je $T_\mathrm{S} = 20{,}0\,\mathrm{h}$. Občiansky život na Utopii sa riadi podľa dĺžky Utópskeho dňa, ktorý je definovaný ako čas medzi dvoma nasledujúcimi hornými kulmináciami rovnakej hviezdy. Odpovedzte na nasledujúce otázky:

(a) Ako je definovaná siderická perióda obehu?

(b) Vypočítajte dĺžku Utópskeho dňa L1, ak hviezdy obiehajú okolo ťažiska v rovnakom smere, v akom rotuje okolo svojej osi Utopia

(c) Vypočítajte dĺžku Utópskeho dňa L2, ak hviezdy obiehajú okolo ťažiska v opačnom smere, v akom rotuje okolo svojej osi Utopia.

Vypočítajte tiež pre prípady v časti (b) aj (c) čas medzi hornými kulmináciami Paradisy a Inferny D_1 a D_2.

2.3.11 AO 2017, úloha 3 – Krabia hmlovina

Krabia hmlovina – M1 má rovníkové súradnice $5^{\mathrm{h}}\,34^{\mathrm{m}}\,31{,}94^{\mathrm{s}}$, $22°0'52{,}2''$. Je známe, že je pozostatkom po výbuchu supernovy II. Podľa novších meraní M1 má oválny tvar s rozmermi $420''$ x $300''$ a jej vzdialenosť je 2 kpc. Ďalej vieme, že v užšej osi svojho oválneho tvaru expanduje rýchlosťou $1500\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Našou úlohou je určiť, v ktorom storočí supernova explodovala.

(a) Nájdite skutočný rozmer M1 v parsekoch.

(b) Vyjadrite vo vhodnejších jednotkách rýchlosť expanzie hmloviny a určte storočie, kedy muselo dôjsť k výbuchu supernovy.

2.3.12 AO 2021, úloha 1 – Trójania – asteroidy

Určte uhol medzi smerom Jupiter – Slnko a smerom Slnko – Trójania, ak vieme, že vzdialenosť Trójanov od Slnka sa rovná vzdialenosti Jupitera od Slnka a tá sa rovná aj vzdialenosti Trójanov od Jupitera.

2.4 Kategória SŠ, finále

2.4.1 AO 2008, úloha 3 – Vlastný pohyb hviezdy

Predpokladajme, že hviezda so zdanlivou jasnosťou m má paralaxu π, priestorovú rýchlosť V, ktorej vektor zviera uhol θ so zorným lúčom. Vypočítajte:

(a) Čas t za ktorý táto hviezda bude najbližšie k Slnku.

(b) Jej paralaxu, tangenciálnu a radiálnu rýchlosť a zdanlivú hviezdnu veľkosť v čase jej minimálnej vzdialenosti od Slnka.

2.4.2 AO 2009, úloha 3

Vypočítajte, kedy vychádzala 30. 4. 2009 a zapadala 1. 5. 2009 hviezda Hocule´a pre pozorovateľa v Honolulu ($\varphi = 21°20'39''$N, $\lambda = 157°50'8''$W). Súradnice hviezdy sú: $\alpha = 14^{\mathrm{h}}\,16^{\mathrm{m}}\,05{,}3^{\mathrm{s}}$, $\delta = 19°8'3''$.
Miestny hviezdny čas o polnoci UTC na Greenwichskom poludníku je 30. 4. 2009 rovný 14h 32m 17,204s a 1.5.2009 rovný 14h 36m 13,765s. Refrakciu zanedbajte!
Pre výšku hviezdy nad obzorom pritom platí

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t\,.$$

2.4.3 AO 2010, úloha 3

Pozorovateľ zisťoval rozdiely v jasnostiach planét pri ich rôznych aspektoch. Pre prvú – vonkajšiu planétu – zistil rozdiel v jej zdanlivej jasnosti medzi polohou v opozícii a v konjunkcii so Slnkom v hodnote 0,85 magnitúdy. Pre druhú – vnútornú planétu – zmeral rozdiel medzi jej jasnosťou v najväčšej východnej elongácii a jasnosťou v hornej konjunkcii v hodnote 0,92 magnitúdy.
O ktoré planéty slnečnej sústavy ide? Predpokladajte kruhové dráhy s polomerom veľkej polosi príslušnej planéty.

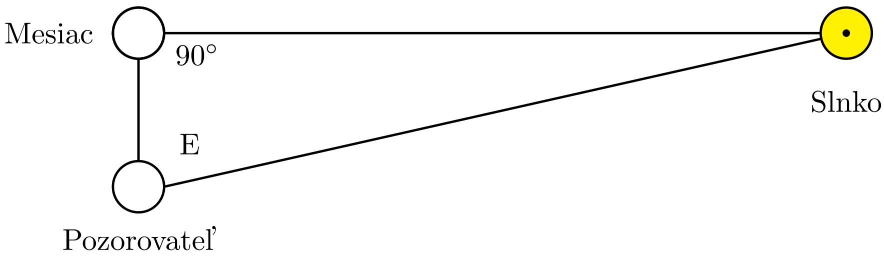
2.4.4 AO 2011, úloha 3

Aká veľká je ročná aberácia pre pozorovateľa na Venuši. Uvažujte vzdialenosť Venuše od Slnka 0,723 au, obežnú dobu Venuše 0,615 roka.

2.4.5 AO 2011, úloha 4

Z údajov o polohe Mesiaca a zistenej polohy Slnka 25. 3. 2007 o 17:59:20 UTC určite uhlovú vzdialenosť Slnka a Mesiaca pri fázovom uhle 90° (Aristarchova úloha) a z nej pomer vzdialeností Slnka a Mesiaca od Zeme.

Pomôcka:
Jednoduchý spôsob, ako určiť relatívne vzdialenosti Mesiaca od Zeme a Zeme od Slnka poznali už starovekí grécki astronómovia. V okamihu, keď je osvetlená práve polovica Mesiaca (fázový uhol: pozorovateľ–Mesiac–Slnko = 90°; dichotómia) je potrebné určiť uhlovú vzdialenosť - elongáciu (E) - Mesiaca od Slnka. Doplnok tejto hodnoty do 90° potom definuje relatívnu vzdialenosť oboch telies od Zeme. Pôvodné Aristarchovo riešenie bolo „tridsatina kvadrantu“, t.j. 3°. Pri relatívnej neznalosti presnej hodnoty čísla π to predstavuje pomer vzdialeností Slnka (S) a Mesiaca (L) od Zeme: $18 < \frac{S}{L} < 20$.



25. 3. 2007 nastala o 18:16 UTC prvá štvrť Mesiaca. Tá je však definovaná pomocou ekliptikálnych súradníc Slnka a Mesiaca. Vo fázovom uhle 90° bude Mesiac voči Slnku pre pozorovateľa o niečo skôr, už o 17:59:20 UTC. V tomto okamihu má Mesiac geocentrické rovníkové súradnice

$$\alpha_{☾} = 6^{\mathrm{h}}\, 20^{\mathrm{m}}\, 40{,}536^{\mathrm{s}}\,, \;\; \delta_{☾} = 28°21'24{,}59''\,,$$

a Slnko geocentrické rovníkové súradnice

$$\alpha_{\odot} = 0^{\mathrm{h}}\, 17^{\mathrm{m}}\, 17{,}118^{\mathrm{s}}\,, \;\; \delta_{\odot} = 1°52'11{,}17''\,.$$

Pre 25.3.2007 o 0:00 UTC je hodnota zdanlivého hviezdneho času na nultom poludníku rovná SO = 12h 08m 18,705s (AR 2007).

Preto, že vzdialenosť Mesiaca je pomerne malá ku veľkosti Zeme, museli by sme pri pozorovaniach z ľubovoľného miesta súčasne pozorované polohy Mesiaca a Slnka zložito transformovať. Ako jednoduchšie sa nám zdá využiť špeciálne polohy so Slnkom a Mesiacom v zenite. Úlohu tak možno zredukovať na riešenie čiastkových problémov.

Úlohy :

(a) Kde na povrchu Zeme je v uvedený čas Mesiac (jeho stred) práve v miestnom zenite? Vtedy (a tam) nie je rozdiel medzi topocentrickou a geocentrickou polohou. Uveďte geografické súradnice tohto miesta λ, ϕ.

(b) Kde na povrchu Zeme je v uvedený čas Slnko (jeho stred) práve v miestnom zenite? Vtedy (a tam) nie je rozdiel medzi jeho topocentrickou a geocentrickou polohou. Uveďte geografické súradnice tohto miesta λ, ϕ.

(c) Ako sa nazývajú na Zemi body s Mesiacom a Slnkom v zenite?

(d) Pomocou vzťahov sférickej trigonometrie spočítajte elongáciu E Mesiaca od Slnka pre geocentrického pozorovateľa

$$\cos E = \sin\delta_\odot \sin\delta_☾ + \cos\delta_\odot \cos\delta_☾ \cos(\alpha_\odot - \alpha_☾)\,.$$

Jeho doplnok: $\delta = (90° - E)$ je hľadaný uhol (pri Slnku) v trojuholníku Zem–Mesiac–Slnko. Kotangens tohto uhla udáva pomer vzdialenosti Slnka a Mesiaca od stredu Zeme, vypočítajte ho.

2.4.6 AO 2012, úloha 1 – Kulminácia hviezd

V ktorej zemepisnej šírke a pre hviezdy s akou deklináciou platí, že ich horná kulminácia je v zenite a dolná kulminácia na horizonte? (Môžete nakresliť obrázok.)

2.4.7 AO 2012, úloha 2

21. decembra pozorovateľ pozoroval zatmenie Mesiaca. Mesiac v ten deň kulminoval vo výške 73,5° nad obzorom. V akej zemepisnej šírke sa nachádzal pozorovateľ?

2.4.8 AO 2017, úloha 2

21. augusta 2017 nastane úplné zatmenie Slnka, ktoré budú mnohí astronómovia z celého sveta pozorovať v USA. Preto je veľmi aktuálne riešiť aj úlohu o zatmení Slnka. Zdanlivý priemer, teda uhlový priemer Mesiaca je o málo menší ako Slnka, preto je počet prstencových zatmení Slnka o trochu väčší ako úplných zatmení. Pre pozorovateľa na Zemi najdlhšie úplné zatmenie Slnka trvá 7,5 min a najdlhšie prstencové zatmenie trvá 12,5 min. V tomto prípade trvanie prstencového zatmenia je časový interval od druhého po tretí kontakt. Predpokladáme, že môžeme vypočítať počet oboch typov zatmení pre veľmi dlhú dobu. Určte pomer prstencových a úplných zatmení. Predpokladáme, že dráha Zeme je kruhová, mesačná dráha je eliptická. Všetky hybridné zatmenia treba započítať medzi prstencové.

2.4.9 AO 2023, úloha 5 – Planetárny tranzit

Jedným zo zriedkavých javov v Slnečnej sústave sú prechody planét popred slnečný disk. Zo všetkých kombinácií planét, z ktorých jav pozorujeme, a planét, ktoré popred Slnko prechádzajú, je prechod Uránu popred slnečný disk pozorovaný z Neptúnu ten najzriedkavejší. Uvažujte, že dráhy Uránu a Neptúna sú kruhové a ich ostatné parametre sú dané údajmi v tabuľke. Ďalej uvažujme, že tento tranzit pozorujeme zo Zeme.

	veľká poloos	sklon dráhy	dĺžka výstupného uzla	polomer planéty
Urán	19,19 au	0,773°	74,0°	25 360 km
Neptún	30,07 au	1,770°	131,8°	24 620 km

Úlohy:

(a) V akom súhvezdí sa budú planéty počas prechodu nachádzať?

(b) O koľko magnitúd Neptún potemnie?

(c) Ako najdlhšie môže trvať úplná fáza tranzitu? Ako najdlhšie môže trvať tranzit medzi 1. a 4. kontaktom?

Kapitola 3

Sférická astronómia

3.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

3.1.1 AO 2014, úloha 3 – Navigácia lietadla II.

Z letiska Sliač štartovalo prieskumné lietadlo U-2 smerom na juh. Po 3900 km letu (1. bod) doplnilo pomocou tankovacieho lietadla KC-135 palivo a pokračovalo smerom na východ. Po ďalších 3900 km letu (2. bod) znova doplnilo palivo a pokračovalo 3900 km smerom na sever, kde (3. bod) po doplnení paliva zmenilo kurz na západ smerom k letisku Sliač, kde pristálo. Priemerná rýchlosť letu prieskumného lietadla bola 650 km h^{-1} vo všetkých štyroch úsekoch letu. Zemepisné súradnice letiska Sliač sú: SŠ 48°38′17″, VD 19°8′3″. Vypočítajte dĺžku a dobu trvania letu.

3.2 Kategória SŠ, domáce kolo

3.2.1 AO 2007, úloha 5

Mesto Petrohrad v Rusku sa nachádza na $60°30'15''$ severnej zemepisnej šírky a $30°$ východnej zemepisnej dĺžky. Mesto Seward na Aljaške leží tiež na $60°$ severnej zemepisnej šírky, ale na $150°$ západnej zemepisnej dĺžky. Aká je vzdialenosť oboch miest meraná po rovnobežke? Aká je vzdialenosť týchto miest meraná po poludníkoch prechádzajúc cez severný pól? Predpokladajme, že Zem je guľa.

3.2.2 AO 2010, úloha 4 – Cirkumpolárna hviezda

Cirkumpolárna hviezda pozorovaná z miesta X v hornej kulminácii severne od zenitu má zenitovú vzdialenosť $29°47'$ a v dolnej kulminácii jej zenitová vzdialenosť je $41°49'$. Určite zemepisnú šírku miesta X a vypočítajte výšku hviezdy v dolnej a hornej kulminácii. Situáciu graficky znázornite.

3.2.3 AO 2014, úloha 3 – Navigácia lietadla I.

Z letiska Sliač štartovalo prieskumné lietadlo U-2 smerom na juh. Po 6 hodinách letu doplnilo pomocou tankovacieho lietadla KC-135 palivo (1. bod) a pokračovalo smerom na východ. Po 6 hodinách letu znova doplnilo palivo (2. bod) a pokračovalo smerom na sever. Po 6 hodinách znova doplnilo palivo (3. bod), zmenilo kurz na západ a po ďalších šiestich hodinách letu pristálo. Priemerná rýchlosť letu prieskumného lietadla bola $650\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ vo všetkých štyroch úsekoch letu. Vypočítajte zemepisné súradnice všetkých troch bodov, nad ktorými lietadlo dopĺňalo palivo a pre úplnosť udajte aj súradnice miesta štartu a pristátia.

3.2.4 AO 2018, úloha 3 – Východ Slnka na Mesiaci

Určte trvanie východu Slnka T na Mesiaci, na selenografickej šírke $\varphi = 50°$. Pre jednoduchosť predpokladajme, že dráha Mesiaca okolo Zeme sa nachádza v rovine ekliptiky a jeho rotačná os je kolmá k rovine obehu. Uhlový priemer Slnka pozorovaný zo Zeme je $\delta = 32'$. Odpoveď zapíšte číselne v hodinách.

3.2.5 AO 2021, úloha 6 – Sklon rotačnej osi planéty

Na planéte, obiehajúcej okolo vzdialenej hviezdy, je na určitom mieste na povrchu cirkumpolárnou hviezdou aj Sírius, ktorý sa počas hornej kulminácie nachádza $75°$ nad obzorom a počas dolnej kulminácie 25° nad obzorom. Planéta obehne okolo svojej materskej hviezdy za 0,15 roka a okolo svojej osi sa otočí za 48 hodín (má prográdnu rotáciu). Najdlhší čas trvania jedného dňa na mieste pozorovania je 31 hodín. Vypočítajte sklon roviny “ekliptiky“ tejto planéty voči rovine jej rovníka.

3.3 Kategória SŠ, finále

3.3.1 AO 2015, úloha 2

Spln Mesiaca nastal 19. júna 2008 o 00:30 Západného Indonézskeho času. Vypočítajte minimálnu a maximálnu hodnotu zotrvania Mesiaca nad horizontom pre pozorovateľa na Boscha Observatóriu (východná zem. dĺžka $107°35'0{,}0''$ E, južná zem. šírka $6°49'0{,}0''$ S). Časové pásmo je UT + 7 hod 30 min.

3.3.2 AO 2019, úloha 1

Pozorovateľ A sleduje oblohu v Galante ($48°11'20''$N, $17°43'35''$E). V ten istý čas zároveň pozoruje oblohu aj pozorovateľ B v Michalovciach ($48°44'57''$N, $21°54'5''$E). Predpokladajme, že sa obe mestá nachádzajú v rovnakej nadmorskej výške (pre jednoduchosť obe sú na hladine mora). Presne o 22:00:00 spozoruje pozorovateľ A na obzore vychádzať hviezdu a zmeria jej deklináciu $\delta = 20°15'$.
Pri Vašich výpočtoch zanedbávajte atmosférickú refrakciu.

(a) Určte hodinový uhol hviezdy v čase pozorovania pre pozorovateľa A.

(b) Odhadnite čas východu tejto hviezdy pre pozorovateľa B.

(c) Koľko kilometrov južne by musel pozorovateľ A cestovať, aby mohol pozorovať hviezdu Hadar ($\alpha = 14^{\mathrm{h}}4^{\mathrm{m}}$, $\delta = -60°22'$). Určte, či je pre pozorovateľa B hviezda Deneb ($\alpha = 20^{\mathrm{h}}41^{\mathrm{m}}$, $\delta = 45°20'$) cirkumpolárna hviezda.

(d) Akú vysokú budovu by museli v Galante postaviť, aby z jej vrcholu bol pozorovateľ A schopný vidieť hviezdu presne v čase, keď ju vidí pozorovateľ B vychádzať. Pre jednoduchosť predpokladajme, že obe mestá ležia na rovnakej rovnobežke a hviezda sa nachádza presne na východe.

(e) Odhadnite dĺžku trvania občianskeho súmraku pri západe Slnka v Galante v deň letného slnovratu. Poznámka: Vychádzajte pri Vašom výpočte z definície občianskeho súmraku.

(f) Vyberte správnu možnosť a veľmi stručne (stačí jednou vetou) sa pokúste odôvodniť svoj výber:

   i) Dĺžka trvania občianskeho súmraku pri západe Slnka v deň letného slnovratu je v Galante **DLHŠIA** / **KRATŠIA** / **ROVNAKO DLHÁ** ako počas zimného slnovratu.

   ii) Ak by náš výpočet bral do úvahy aj atmosférickú refrakciu (ktorá dosahuje pri horizonte asi $35'$) tak by sa vypočítaná dĺžka súmraku **PREDĹŽILA** / **SKRÁTILA** / **ZOSTALA BY ROVNAKÁ**.

Kapitola 4

Fotometria a spektroskopia

4.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

4.1.1 AO 2007, úloha 2

Na ktorú z planét dopadne zo Slnka viac energie: na Mars alebo na Jupiter?

4.2 Kategória ZŠ, finále

4.2.1 AO 2007, úloha 3

S použitím absolútnej (vizuálnej) magnitúdy Slnka určte aká bude zdanlivá (vizuálna) magnitúda Slnka pozorovaného zo vzdialenosti Síria, t.j. 8,6 ly.

4.2.2 AO 2008, úloha 3 – Pulzujúca premenná hviezda

Pulzujúce premenné hviezdy (cefeidy) menia svoju jasnosť v dôsledku periodicky sa opakujúceho zväčšovania a zmenšovania svojej veľkosti, pričom z pozorovaní vieme, že existuje vzťah medzi periódou v dňoch a absolútnou hviezdnou veľkosťou v maxime takejto hviezdy

$$M = -1{,}63 - 2{,}54 \log P\,.$$

Vypočítajte paralaxu pulzujúcej premennej hviezdy, ktorej zdanlivá hviezdna veľkosť je $m = 4{,}2\,\mathrm{mag}$ a perióda 40 dní.

4.2.3 AO 2009, úloha 2 – Solárna konštanta pre Mars

Solárnou konštantou nazývame energiu žiarenia Slnka dopadajúca za jednotku času na jednotku plochy kolmej na smer šírenia žiarenia, a to v strednej vzdialenosti Zeme od Slnka (mimo zemskej atmosféry). Hodnota solárnej konštanty je $1366\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Aká je energia dopadajúca zo Slnka za jednotku času na jednotku plochy kolmej na smer šírenia žiarenia, a to vo vzdialenosti Marsu?

4.2.4 AO 2013, úloha 2

Absolútna jasnosť Slnka je 4,82 mag. Aká bude jasnosť Slnka pozorovaného zo vzdialenosti Proximy Centauri, vzdialenej 4,22 ly?

4.2.5 AO 2014, úloha 1 – Slnko a lupa

Každý z nás pozná možnosť vypáliť pomocou Slnka a lupy do dreva stopu po slnečnom lúči. Odrazeným slnečným svetlom svieti aj Mesiac. Ak dokážeme túto stopu pomocou Slnka vypáliť lupou s priemerom 2 cm, akú veľkú by sme ju museli mať, aby sme do rovnakého materiálu vypálili stopu svetlom Mesiaca v splne?

4.3 Kategória SŠ, domáce kolo

4.3.1 AO 2008, úloha 1

Vypočítajte celkovú svietivosť hviezdy, ktorá má povrchovú teplotu 7500 K a polomer 2,5-krát väčší ako Slnko. Výsledok vyjadrite v jednotkách svietivosti Slnka.

4.3.2 AO 2008, úloha 3

Zmena spinu elektrónu v atóme vodíka v pokoji produkuje elektromagnetickú vlnu s frekvenciou 1420,406 MHz. Táto emisia sa pozoruje z plynového mračna v okolí centra Galaxie, pričom jej pozorovaná frekvencia bola 1421,65 MHz. Vypočítajte rýchlosť mračna vzhľadom k Zemi v čase pozorovania a rozhodnite, či sa pohybovalo k nám alebo od nás.

4.3.3 AO 2008, úloha 6

Supernova v maxime jasnosti má svietivosť 10^{10} krát väčšiu ako Slnko. Vypočítajte vzdialenosť takejto supernovy, keby počas dňa bola na oblohe rovnako jasná ako Slnko.

4.3.4 AO 2008, úloha 7

Vypočítajte, aká je vlnová dĺžka maxima rozdelenia elektromagnetického žiarenia hviezdy, ktorej povrchová teplota je 4000 K.

4.3.5 AO 2009, úloha 1

Montážna skriňa, ktorá má viditeľný povrch 0,5 m^2 a ktorú nechtiac odhodila v smere pohybu stanice ISS americká astronautka, dočasne lieta okolo Zeme v dráhe ISS. Predmet je pozorovateľný ako objekt 7,5 mag letiaci niekoľko minút pred stanicou ISS. Vypočítajte, aká veľká je viditeľná plocha povrchu stanice ISS ak jej jasnosť má hodnotu −2,9 mag a ak predpokladáme, že obe telesá sú z materiálu s rovnakou odrazovou schopnosťou.

4.3.6 AO 2009, úloha 6 – Spektrum

Laboratórna dĺžka spektrálnej čiary Mg II je 279,8 nm. V spektre vzdialeného objektu bola nameraná dĺžka tejto čiary 550 nm.

(a) Aká je relatívna rýchlosť tohto objektu vzhľadom k Zemi?

(b) Ako ďaleko je pozorovaný daný objekt?

(c) Popíšte stručne princíp Dopplerovho princípu a Hubblovho zákona.

4.3.7 AO 2010, úloha 1 – Jazero

Koľko slnečnej energie prijme jazero s plochou $1\,\mathrm{km}^2$ za 1 minútu pri jasnej oblohe, keď výška Slnka nad horizontom je 30° a priepustnosť atmosféry je 80 %?

4.3.8 AO 2010, úloha 3 – Deneb

Deneb je hviezdny nadobor, oveľa žiarivejší ako naše Slnko a na oblohe ho vidíme ako hviezdu so zdanlivou hviezdnou veľkosťou 1,25 mag. Keby bol Deneb vo vzdialenosti Síria (2,64 pc), akú by mal zdanlivú jasnosť? Porovnajte s Mesiacom. Vzdialenosť Denebu je 433 pc.

4.3.9 AO 2011, úloha 4

Po utlmení sa termojadrových procesov v Slnku sa jeho polomer zväčší na $1{,}2 \cdot 10^8$ km a prejde do štádia červeného obra. Jeho efektívna teplota klesne na 3000 K.

(a) Ktorá z planét našej Slnečnej sústavy sa bude vtedy nachádzať najbližšie takého pásma, ktoré z energetického hľadiska bude odpovedať súčasným podmienkam vo vzdialenosti Zeme od Slnka?

(b) Aký bude uhlový priemer Slnka pozorovaný z tej planéty?

4.3.10 AO 2012, úloha 1

Odvoďte vzorec na určenie absolútnej bolometrickej magnitúdy hviezdy M_b, ak je pre hviezdu daný jej polomer R v km a efektívna teplota T v K, v ktorom budú vystupovať len tieto dve veličiny ! (Môžete využiť hodnoty $M_{b,\odot}$, $T_\odot$, $R_\odot$.)

4.3.11 AO 2012, úloha 3

Koľko hviezd s magnitúdou 0 mag by nahradilo celkový jas všetkých hviezd (v danej časti oblohy) s magnitúdami od 10 mag do 11 mag , ktorých je 400 000. Ich priemerná hviezdna veľkosť je $m = 10{,}5$ mag.

4.3.12 AO 2013, úloha 4

O koľko Kelvinov sa zmení teplota atmosféry hviezdy spektrálnej triedy A0 s $T = 10\,000\,\mathrm{K}$, ak sa jej absolútna bolometrická magnitúda zmenší o 0,5 mag (t.j. hviezda sa zjasní), pričom jej polomer sa nezmení?

4.3.13 AO 2016, úloha 2, AO 2022 – Tepelné rozšírenie spektrálnej čiary

Určte šírku $\Delta\lambda$ pre teplotné rozšírenie čiary K Ca II s vlnovou dĺžkou $\lambda = 393{,}4\,\mathrm{nm}$ pre fotosféry hviezd s teplotami 3000 K, 6000 K, 9000 K. Diskutujte výsledok s ohľadom na význam teploty pre rozšírenie čiary. Ako ovplyvňuje šírku spektrálnych čiar rozdielna hmotnosť jednotlivých atómov, napr. vodíka, hélia, vápnika a železa?
Relatívna atómová hmotnosť vápnika je $A_{\mathrm{Ca}} = 40{,}078$.

4.3.14 AO 2016, úloha 4 – Deneb

Najjasnejšou hviezdou súhvezdia Labute je hviezda Deneb. V Encyklopédii astronómie sa o nej okrem iného uvádza, že je to nadobor, oveľa žiarivejší ako naše Slnko. Je vo vzdialenosti 1530 svetelných rokov od Zeme a na oblohe ho vidíme ako hviezdu so zdanlivou hviezdnou veľkosťou 1,25 mag. V inej známej astronomickej literatúre sa o tejto hviezde píše, že keby bola vo vzdialenosti Síria (8,6 ly), jej zdanlivá hviezdna veľkosť by bola taká, akú má Mesiac v splne. Overte výpočtom, či toto tvrdenie je správne.

4.3.15 AO 2017, úloha 2 – Oscilácie hviezdy v galaxii

Podľa jednej z teórií sa Slnko nepohybuje priamo v rovine galaxie, ale vykonáva vertikálne oscilácie v smere nad a pod rovinu galaxie. Hviezda s absolútnou magnitúdou M_{app} sa nachádza na priamke, v ktorej osciluje aj Slnko. Vypočítate amplitúdu týchto oscilácií, ak sa zdanlivá magnitúda hviezdy mení medzi maximálnou a minimálnou hodnotou m_{max} a m_{min}. Zanedbajte medzihviezdnu absorpciu.

4.3.16 AO 2018, úloha 1 – Celková jasnosť hviezd

Vypočítajte koľko hviezd so zdanlivou hviezdnou veľkosťou $m = -0{,}15\,\mathrm{mag}$ by malo rovnakú celkovú jasnosť ako je celková jasnosť všetkých 546 000 hviezd so zdanlivou hviezdnou veľkosťou od $m = 10\,\mathrm{mag}$ do $m = 11\,\mathrm{mag}$. Ich priemerná hviezdna veľkosť je $m = 10{,}5\,\mathrm{mag}$.

4.3.17 AO 2018, úloha 2 – Heliograf

Heliograf je prístroj určený na meranie dĺžky slnečného svitu. Skladá sa z gule s polomerom $r = 5\,\mathrm{cm}$, vyrobenej zo skla s indexom lomu $n = 1{,}5$. Určte v akej vzdialenosti od povrchu gule sa nachádza papierik, do ktorého Slnko vypaľuje stopu. Je obrazom Slnka bod, kruh alebo machuľa? Odhadnite, aký energetický tok a výkon dopadá na body stopy. Slnečná konštanta je $k = 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Predpokladajte efektívnu šírku stopy $D = 1\,\mathrm{mm}$.

4.3.18 AO 2019, úloha 1 – Exoplanéta a hviezda

V súčasnosti sa neustále objavujú nové exoplanéty a známych ich je už vyše 5000. Niektoré z nich majú podobné parametre ako naša Zem. Jedna takáto exoplanéta obieha okolo trpasličej materskej hviezdy s polomerom približne 0,38 polomerov Slnka a teplotou 2500 K v strednej vzdialenosti 0,073 au.

(a) Vypočítajte žiarivý výkon tejto hviezdy (t.j. množstvo energie vyžiarenej z celého povrchu hviezdy za sekundu), porovnajte ho s výkonom Slnka.

(b) Určte, aký žiarivý výkon dopadá kolmo na meter štvorcový povrchu uvedenej exoplanéty z jej materskej hviezdy a porovnajte túto hodnotu s množstvom energie, ktorá dopadá na meter štvorcový povrchu Zeme zo Slnka (tzv. slnečná konštanta).

4.3.19 AO 2020, úloha 4 – Družica HIPPARCOS

Podľa meraní družice HIPPARCOS má jedna z hviezd paralaxu $\pi = 0{,}0025''$. Jej zdanlivá hviezdna veľkosť je $m = 8\,\mathrm{mag}$. Vypočítajte aká je jej absolútna hviezdna veľkosť ak v danom smere je priemerná absorpcia $a = 0{,}005\,\mathrm{mag\,pc^{-1}}$.

4.4 Kategória SŠ, finále

4.4.1 AO 2007, úloha 1

Moderná pozorovacia technika umožnila objavy planét obiehajúcich okolo iných hviezd našej Galaxie – exoplanét, ktorých v súčasnosti poznáme už vyše 200[1]. Niektoré z nich by mohli mať vlastnosti podobné Zemi, potenciálnym kandidátom je napríklad objekt Gliese 581c. Exoplanéta obieha okolo trpasličej materskej hviezdy Gliese 581[2] s polomerom približne 0,38 $R_\odot$ a teplotou 2500 K v strednej vzdialenosti 0,073 au.

Úlohy:

(a) Vypočítajte žiarivý výkon hviezdy Gliese 581 (t. j. množstvo energie vyžiarenej z celého povrchu hviezdy za sekundu), porovnajte ho so žiarivým výkonom Slnka.

(b) Určte, aký žiarivý výkon dopadá kolmo na meter štvorcový povrchu planéty Gliese 581c z jej materskej hviezdy, porovnajte túto hodnotu s množstvom energie, ktorá dopadá na meter štvorcový povrchu Zeme zo Slnka (tzv. slnečná konštanta).

4.4.2 AO 2007, úloha 4

Pozorovaním sme zistili, že vlnová dĺžka spektrálnej čiary ionizovaného vápnika, Ca II, v spektre spektroskopickej dvojhviezdy sa periodicky mení o $\pm 0{,}75$ Å. Vieme, že jej laboratórna vlnová dĺžka je 3933,6 Å. Vypočítajte hodnotu dráhovej rýchlosti tejto komponenty dvojhviezdy ak vieme, že excentricita jej dráhy je $e = 0$, a sklon roviny dráhy k zornému lúču je 30°.

4.4.3 AO 2007, úloha 5

Podľa meraní družice HIPPARCOS má jedna z hviezd paralaxu $\pi = 0{,}0025''$. Jej zdanlivá hviezdna veľkosť je $m = 8$ mag. Vypočítajte aká je jej absolútna hviezdna veľkosť, ak v danom smere je priemerná absorpcia $a = 0{,}005$ mag/pc.

4.4.4 AO 2007, úloha 6

Vypočítajte koľko hviezd so zdanlivou hviezdnou veľkosťou $m = -0{,}15$ mag by malo rovnakú celkovú jasnosť ako je celková jasnosť všetkých 546 000 hviezd so zdanlivou hviezdnou veľkosťou od $m = 10$ mag do $m = 11$ mag. Ich priemerná hviezdna veľkosť je $m = 10{,}5$ mag.

[1] Ku dňu 26. 10. 2022 bolo potvrdených už vyše 5000 exoplanét.

[2] V roku 2008 bola vyslaná zo Zeme správa, ktorá by mala doraziť ku exoplanéte v roku 2029.

4.4.5 AO 2007, úloha 8

Vypočítajte efektívnu teplotu Slnka ak poznáte jeho polomer, slnečnú konštantu vo vzdialenosti Zeme a Stefanovu-Boltzmannovu konštantu.

4.4.6 AO 2009, úloha 2 – Rovnakým žiarivý výkon

O dvoch hviezdach vieme, že sú rovnaké, čo sa týka množstva vyžiarenej energie. Pozorovaná jasnosť jednej z nich je 100x menšia, než jasnosť druhej. Zároveň jasnejšia hviezda sa nám pri pozorovaní javí sfarbená do biela, slabšia do červena.

(a) Koľkokrát ďalej je slabšia hviezda než jasnejšia?

(b) Ktorá z nich je rozmerovo väčšia?

(c) Ako by ste museli korigovať vypočítanú vzdialenosť hviezdy keby ste zistili, že medzi ňou a vami sa nachádza medzihviezdna hmota spôsobujúca absorpciu svetla?

4.4.7 AO 2011, úloha 1

Dvojhviezda α Geminorum (Castor) má zložky s magnitúdami 2,85 a 1,99. Aká je magnitúda dvojhviezdy pri pozorovaní voľným okom, keď ju vidíme ako jednoduchú hviezdu?

4.4.8 AO 2012, úloha 3

Zákrytová dvojhviezda sa skladá z hviezd 1 a 2 s polomermi $R_1 = 2\,R_\odot$ a $R_2 = 1\,R_\odot$. Efektívne povrchové teploty hviezd sú $T_1 = 10\,000\,\mathrm{K}$ a $T_2 = 6000\,\mathrm{K}$. Ich obežné dráhy okolo spoločného ťažiska ležia presne v rovine zorného lúča, t.j. sklon $i = 90°$. Vypočítajte o koľko magnitúd poklesne jasnosť sústavy v sekundárnom minime jasnosti - pri prechode menšej zložky 2 popred väčšiu 1.

4.4.9 AO 2012, úloha 4

Odvoďte vzorec na určenie absolútnej bolometrickej magnitúdy hviezdy M_b, ak je pre hviezdu daný jej polomer R v km a efektívna teplota T v K, v ktorom budú vystupovať len tieto dve veličiny. Môžete tiež využiť hodnoty absolútnej bolometrickej magnitúdy, efektívnej teploty a polomeru Slnka.

4.4.10 AO 2013, úloha 2

Predpokladajme, že slnečné panely družice typu IRIDIUM odrážajú všetko slnečné svetlo (t.j. ich odrazivosť je 100%) a každý má rozmer $2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$. Družica je od pozorovateľa vzdialená 800 km. Aký jasný záblesk (v magnitúdach) dokáže odraz svetla Slnka od jedného panelu kolmo natočeného k pozorovateľovi vyprodukovať? Atmosféru Zeme zanedbajte.

4.4.11 AO 2013, úloha 4

Najjasnejšia hviezda nočnej oblohy, Sírius, sa skladá z hviezdy hlavnej postupnosti s teplotou $T_\mathrm{A} = 10\,000\,\mathrm{K}$ a bieleho trpaslíka s teplotou $T_\mathrm{B} = 30\,000\,\mathrm{K}$. Pre ich polomery platí $R_\mathrm{A} = 100R_\mathrm{B}$. Na akej vlnovej dĺžke λ vyžiaria obe zložky A i B rovnaké množstvo žiarenia? Použite Planckovu funkciu v tvare

$$I(\lambda,T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp \frac{-hc}{k_\mathrm{B}T\lambda} \,.$$

4.4.12 AO 2014, úloha 1 – Zákrytová dvojhviezda

Zákrytová dvojhviezda VV Cep má celkovú zdanlivú magnitúdu $m_\mathrm{S} = 6{,}7\,\mathrm{mag}$. Skladá sa z nadobrej červenej hviezdy spektrálneho typu M a menšej a teplejšej hviezdy so spektrom typu B. Ak červený nadobor zakryje úplne menšiu a teplejšiu zložku, pozorujeme pokles zdanlivej magnitúdy sústavy o 0,7 mag. Chladný nadobor má absolútnu magnitúdu $M_\mathrm{M} = -4{,}0\,\mathrm{mag}$. Vypočítajte:

(a) Vzdialenosť sústavy VV Cep.

(b) Zdanlivú magnitúdu teplejšej zložky m_B.

(c) Absolútnu magnitúdu teplejšej zložky M_B.

4.4.13 AO 2014, úloha 2 – Nestabilný asteroid

Do nestabilného asteroidu približne guľového tvaru s priemerom 1 km narazil veľkou rýchlosťou meteoroid, podstatne menší ako asteroid. Po náraze sa asteroid rozpadol na trosky, ktoré sa vzápätí spojili do štyroch menších častí, približne rovnakého tvaru a veľkosti, ktoré sa pomaly od seba vzďaľujú. Vypočítajte, o koľko sa zmení jasnosť asteroidu tesne po svojom rozpade.

4.4.14 AO 2015, úloha 4

Žiarenie prichádzajúce zo Slnka na Zem musí najprv prekonať atmosféru Zeme, kým dopadne na jej povrch. Zem tiež uvoľňuje žiarenie do priestoru a toto žiarenie musí tiež prechádzať atmosférou do kozmického priestoru. Je známe, že prestupnosť slnečného žiarenia cez atmosféru počas prechodu (t_1) je vyššia ako prestupnosť žiarenia zo Zeme von (t_2). Nech $T_\odot$ je efektívna teplota Slnka, $R_\odot$ je polomer Slnka, $R_\oplus$ je polomer Zeme a x je vzdialenosť Zeme od Slnka. Odvoďte teplotu zemského povrchu ako funkciu vyššie uvedených parametrov, pričom je isté, že množstvo prijatého a vyžiareného žiarenia Zemou je rovnaké (Zem je v tepelnej rovnováhe).

4.4.15 AO 2017, úloha 1

V dvojhviezde je jasnosť primárnej zložky 1,0 mag a sekundárnej zložky 2,0 mag. Vypočítajte celkovú jasnosť dvojhviezdy, ak by sme ju videli ako jednu hviezdu.

4.4.16 AO 2018, úloha 3 – Sírius

Sírius je dvojhviezda. Slabšia zložka, Sírius B má zdanlivú vizuálnu magnitúdu $m_\mathrm{V} = 8{,}44$ mag.

(a) Ak je vzdialenosť Síria 2,64 pc, vypočítajte absolútnu vizuálnu magnitúdu Síria B. Medzihviezdnu absorpciu zanedbajte.

(b) Spektrálne rozloženie energie ukazuje, že Sírius B má efektívnu teplotu 25 200 K. Bolometrická korekcia pre túto teplotu je $BC = -2{,}73$ mag. Ak pre Slnko je $BC = -0{,}1$ mag, vypočítajte absolútnu bolometrickú magnitúdu M_bol Síria B.

(c) Vypočítajte svietivosť a polomer Síria B.

(d) Ak je hmotnosť Síria B 1,018 $M_\odot$, vypočítajte aj strednú hustotu tohto bieleho trpaslíka.

4.4.17 AO 2019, úloha 2

(a) Stefanov-Boltzmannov zákon nám hovorí, ako závisí intenzita vyžarovania hviezdy od jej teploty

$$I = \sigma T^4\,,$$

kde σ je Stefanova-Boltzmanova konštanta. σ sa dá vyjadriť pomocou iných konštánt ako

$$\sigma = A\frac{k_\mathrm{B}^\alpha}{h^\beta c^\gamma}\,,$$

kde k_B je Boltzmannova konštanta, h je Planckova konštanta, c je rýchlosť svetla a A je bezrozmerná konštanta. Určte pomocou rozmerovej analýzy hodnoty koeficientov α, β, γ a hodnotu konštanty A.

(b) Rádioteleskop s priemerom $D = 200$ m pozoroval po celú noc pulzar. Spektrálna intenzita žiarenia pulzaru na frekvencii 1660 MHz bola $S_{1660} = 0{,}21$ Jy. Aké množstvo energie zachytí rádioteleskop počas osemhodinového pozorovania pulzaru na frekvencii 1660 MHz so šírkou pásma 100 MHz?

Pre vyžarovanie rádiových vĺn sa Planckov zákon dá zjednodušiť na Rayleighov-Jeansov zákon

$$B_{\mathrm{f}} = \frac{2k_{\mathrm{B}}Tf^2}{c^2}\,,$$

kde B_{f} je výkon pulzaru prerátaný na meter štvorcový na steradián na Hertz.

(c) Porovnajte túto energiu s energiou zachytenou počas 5 minút solárnym panelom s plochou $1\,\mathrm{m}^2$ a účinnosťou 5,4%. Koľkokrát je menšia/väčšia energia zachytená solárnym panelom?

4.4.18 AO 2021, úloha 3 – Zrkadlová Zem

Predstavme si nasledujúci scenár:
Celú Zem (uvažujme, že je dokonale guľatá) obložíme zrkadlami s odrazivosťou $k = 98$ %. Teda nimi prejde iba 2 % energie, ktorá potom dopadne na Zem. Zrkadlá sú umiestnené zanedbateľne nízko nad povrchom Zeme, teda vo vzdialenosti $R_\oplus$ od jej stredu. Všetka atmosféra je uzavretá pod nimi, čo znamená, že nad zrkadlami už rovno začína vesmír.

(a) Koľko energie zo Slnka dopadá na $1\,\mathrm{m}^2$ povrchu zrkadla za sekundu?

(b) Koľko energie zo Slnka získa celá Zem pod zrkadlom za sekundu?

Uvažujte, že Zem obieha okolo Slnka po kruhovej dráhe.
Zrkadlá sú konštruované tak, že zvnútra vedia prepúšťať všetku energiu von. Zanedbajte albedo a efekty atmosféry (je veľmi tenká). Uvažujte, že Zem pod zrkadlami rotuje dostatočne rýchlo na to aby sa zahrievala rovnomerne a je absolútne čierne teleso (všetku energiu čo získa následne vyžiari, ako napr. Slnko), potom:

(c) Aká bude teplota na povrchu Zeme, pod zrkadlom?

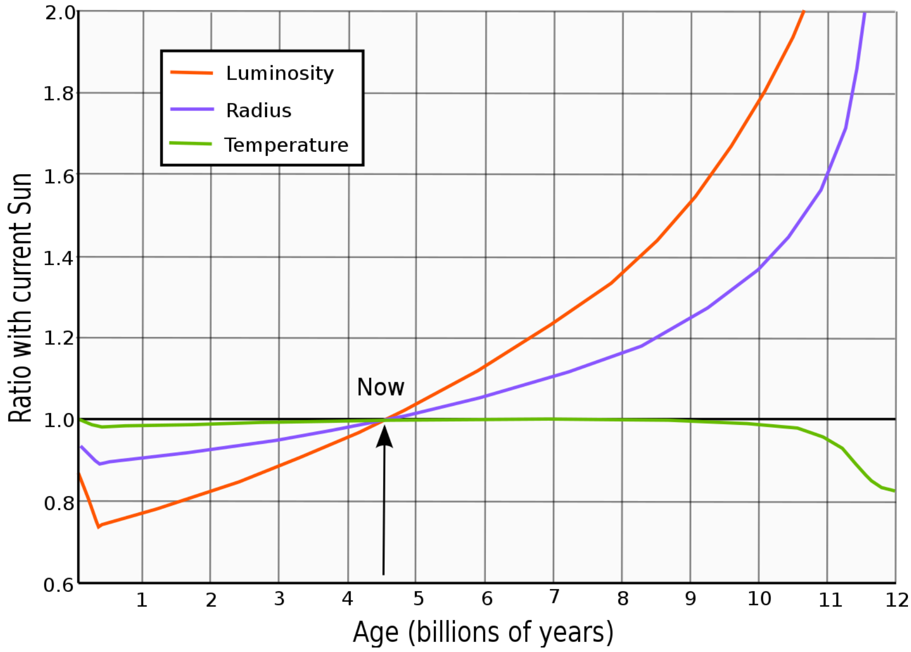
Graf na obrázku 4.1 ukazuje, ako sa bude v nasledujúcich miliardách rokov zväčšovať svietivosť Slnka.

(d) O koľko Kelvinov vzrastie teplota na Zrkadlovej Zemi:

  i) Za miliardu rokov?

  ii) Za 3 miliardy rokov?

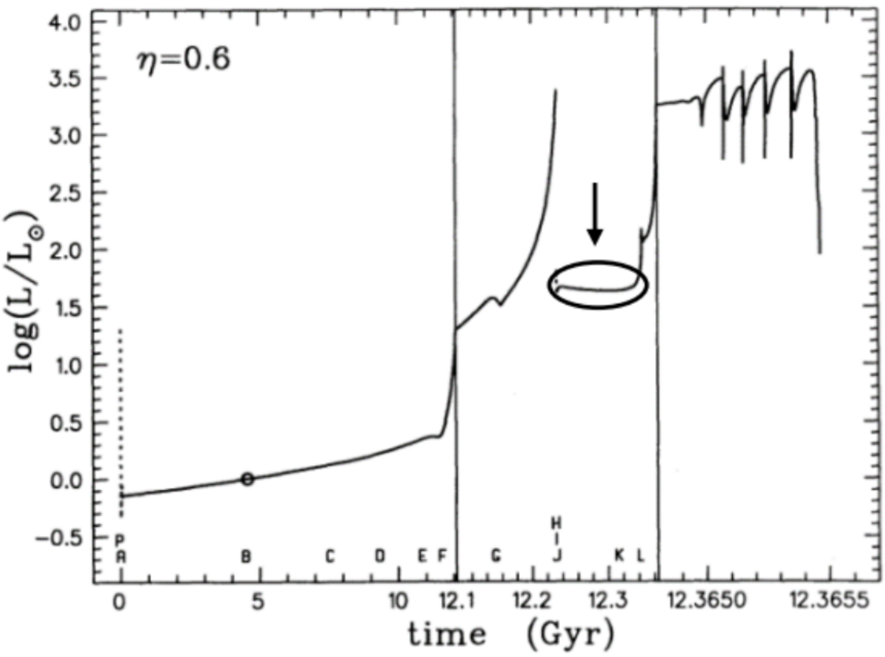
  iii) Za 5 miliárd rokov?



Obr. 4.1: (zdroj: cambridge.org/core)

Toto je však nič v porovnaní s tým čo sa bude diať za 7,5 miliardy rokov. Slnko začne spaľovať hélium a premení sa na červeného obra. Závislosť jeho svietivosti v tomto období vykresľuje graf na obrázku 4.2. Logaritmus na osi y je dekadický so základom 10.

(e) Bol by možný život pod zrkadlami počas stabilnej fázy zakrúžkovanej na obrázku?



Obr. 4.2: GRAF 2 (zdroj: harvard.edu)

Priemerná teplota Zeme je 10 °C v súčasnosti a bola 0 °C počas doby ľadovej (0 °C = 273 K).

4.4.19 AO 2023, úloha 3.1 – O medzihviezdnej absorpcii

Medzi hviezdou s farebným indexom $(B-V)_0 = 0$ a Zemou sa nachádza mrak medzihviezdneho prachu, ktorý absorbuje časť svetla hviezdy. Absorpcia závisí na vlnovej dĺžke: čím väčšia je vlnová dĺžka, tým menšia je absorpcia. Kvôli absorpcii na Zemi pozorujeme odlišnú hodnotu farebného indexu $(B-V)$. Je táto pozorovaná hodnota kladná alebo záporná? Stredná vlnová dĺžka vo filtri B je 442 nm a vo filtri V to je 540 nm.

Kapitola 5

Optika a detektory

5.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

5.1.1 AO 2007, úloha 4

Aká môže byť najmenšia vzdialenosť dvoch bodov na Marse v kvadratúre, aby sme ich rozlíšili v ďalekohľade s priemerom objektívu 60 cm?

5.1.2 AO 2008, úloha 1

Vypočítajte, aký najmenší musí byť priemer krátera na povrchu Mesiaca, aby mohol byť pozorovateľný voľným okom z povrchu Zeme. Predpokladajte, že vstupná pupila ľudského oka má priemer 5 mm a uvažujte strednú vzdialenosť Mesiaca od Zeme.

5.1.3 AO 2014, úloha 4 – Rozlíšenie ďalekohľadu

Aká môže byť najmenšia vzdialenosť dvoch bodov na Marse, aby sme ich rozlíšili v ďalekohľade s priemerom objektívu 10 m, ak je Mars v kvadratúre.

5.1.4 AO 2015, úloha 4 – Priemer ďalekohľadu

Aký veľký by musel byť priemer objektívu ďalekohľadu, aby v ňom bol v čase perigea na Mesiaci viditeľný kráter s priemerom 3,6 km. Využite poznatok, že 1 m vidíme voľným okom pod uhlom 1° zo vzdialenosti 57,3 m. Vzdialenosť Mesiaca v perigeu je 360 000 km.

5.2 Kategória ZŠ, finále

5.2.1 AO 2007, úloha 6

(a) Aký veľký by musel byť priemer objektívu ďalekohľadu, aby v ňom bol v čase perigea na Mesiaci viditeľný kráter o priemere 3,6 km. Využite poznatok, že 1 m vidíme voľným okom pod uhlom 1° zo vzdialenosti 57,3 m a vzdialenosť Mesiaca v perigeu je 360 000 km.

(b) Aké má ďalekohľad zorné pole, ak pri montáži bez pohonu možno vidieť v zornom poli celý Mesiac počas 4 minút. Počítajte s uhlovým priemerom Mesiaca $30'$ a zanedbajte vlastný pohyb Mesiaca.

5.2.2 AO 2008, úloha 4 – Rozlíšenie ďalekohľadu

Vypočítajte, akú najmenšiu dĺžku musí mať stopa zanechaná Lunochodom na Mesiaci, aby sme jej obraz pri pozorovaní 6-metrovým ďalekohľadom Špeciálneho observatória na Kaukaze odlíšili od bodu?

5.2.3 AO 2013, úloha 1

Aký veľký by musel byť priemer objektívu ďalekohľadu, aby v ňom bol v čase perigea na Mesiaci viditeľný kráter o priemere 5 km. Využite poznatok, že 1 m vidíme voľným okom pod uhlom 1° zo vzdialenosti 57,3 m a vzdialenosť Mesiaca v perigeu je 360 000 km.

5.3 Kategória SŠ, domáce kolo

5.3.1 AO 2014, úloha 5 – Barlowova šošovka

Navrhnite na existujúci ďalekohľad Barlowovu šošovku pre predĺženie ohniskovej vzdialenosti objektívu z $f_1 = 1200\,\mathrm{mm}$ na $f_2 = 1800\,\mathrm{mm}$. Určite polohu, kde bude Barlowova šošovka umiestnená aj jej ohniskovú vzdialenosť.

5.4 Kategória SŠ, finále

5.4.1 AO 2014, úloha 3 – Mesiac v splne

Na obrázku je snímka Mesiaca pri splne a čiastočnom zatmení Mesiaca 25. 4. 2013 o 20:59:47 SEČ na čipe kamery `CANON 550D`, s rozmermi 14,9 mm × 22 mm. Na snímke s rozmermi 1023 px x 682 px určite najskôr priemer Mesiaca. Pomocou údajov o Mesiaci okamihu expozície z aplikácie `STELLARIUM` sme zistili, že horizontálna paralaxa Mesiaca bola rovná $60'20{,}32''$. Ďalšie konštanty používajte astronomickú jednotku, polomer Zeme, polomer Mesiaca, 1 rad = 206 265″. Vypočítajte ohniskovú vzdialenosť fotografického objektívu.

5.4.2 AO 2015, úloha 3

Kráter na povrchu Mesiaca má priemer 80 km. Je možné takýto kráter pozorovať voľným okom, ak apertúra oka alebo vstupná pupila má priemer 5 mm? Vlnová dĺžka svetla je $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$.

5.4.3 AO 2016, úloha 4

Aký by mal byť priemer rádioteleskopu, ktorý pracuje na vlnovej dĺžke $\lambda_\mathrm{r} = 1\,\mathrm{cm}$ s takým istým rozlíšením, aké má optický ďalekohľad s priemerom $D = 10\,\mathrm{cm}$?

5.4.4 AO 2017, úloha 3

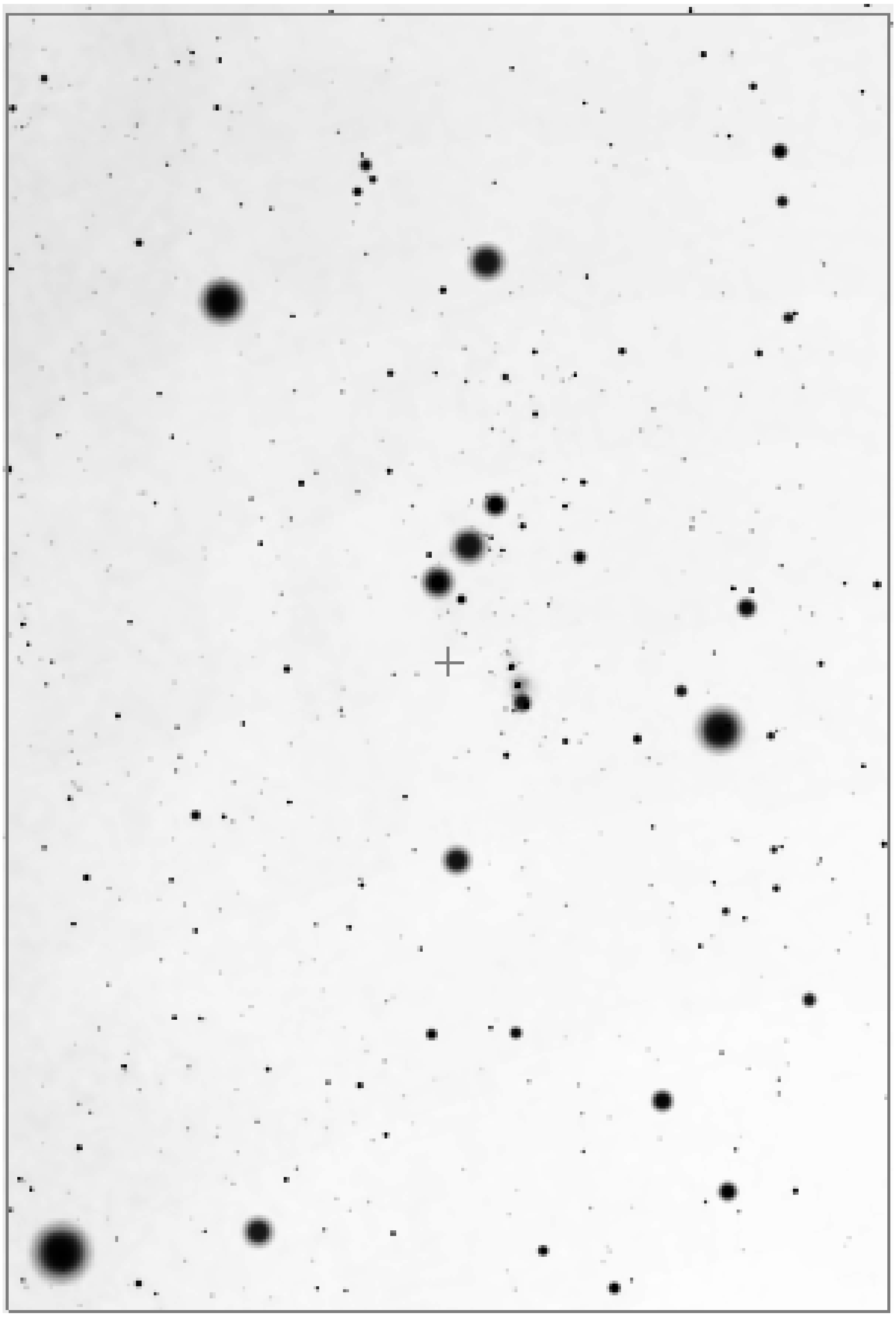
Centrum galaxie pozostáva zo supermasívnej čiernej diery s hmotnosťou $M = 4{,}106 \cdot 10^6\, M_\odot$. Astronomická obec sa pokúša riešiť jej horizont udalostí. Pre nerotujúce čierne diery je Schwarzschildov polomer $R_\mathrm{s} = 3\frac{M}{M_\odot}$ km. Predpokladajme, že máme rádioteleskop rozmerov Zeme (využitím VLBI Very-long-baseline interferometry). Akú vlnovú dĺžku by sme mali použiť aby sme rozlíšili horizont čiernej diery? Vzdialenosť Slnka od galaktického centra poznáme.

5.4.5 AO 2017, úloha 4

`Canon 550D` má čip s rozmermi 15 mm × 22 mm a s 4272 x 2848 pixelmi. Dané sú súradnice (ekvinokcium J 2000,0) hviezd Mirzam ($6^\mathrm{h}\,22^\mathrm{m}\,42^\mathrm{s}$, $-17°57'21''$) a Cursa ($5^\mathrm{h}\,7^\mathrm{m}\,51^\mathrm{s}$, $-5°5'12''$). Viete určiť zo snímky ohniskovú vzdialenosť objektívu, s ktorým bola urobená táto snímka?

5.4.6 AO 2020, úloha 4 – Ďalekohľad

Do reflektora s priemerom primárneho zrkadla 150 mm a svetelnosťou $f/5$ umiestnime okulár s ohniskovou vzdialenosťou 10 mm. Aké zväčšenie má daná konfigurácia?
Hviezda Vega ($18^\mathrm{h}\ 36^\mathrm{m}$, $38°47'$) prešla po vypnutí hodinového stroja priemerom zorného poľa okuláru za 190 sekúnd. Určte AFOV, tj. uhlový priemer zdanlivého zorného poľa (ide o charakteristiku okuláru danú jeho konštrukciou). Okulár vymeníme za CCD čip s rozmermi 35,8 mm × 23,9 mm, ktorý má 12,8 Mpx. Aký veľký obraz (priemer v px) Jupitera uvidíme na obrázku, ak má Jupiter uhlový priemer $45''$?



Kapitola 6

Fyzika hviezd a planét

6.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

6.1.1 AO 2008, úloha 7 – Ničivý impakt

Meno Apophis pochádza z gréckeho prekladu mena boha Ničiteľa, ktorý sídli vo večnej temnote podsvetia a každý deň sa pokúša pohltiť slnečnú loď boha Ra a ľudstvo tak zbaviť životodarného Slnka. Meno Apophis má aj blízkozemský asteroid, ktorý zaujíma astronómov pre možnosť jeho zrážky so Zemou v roku 2029. Apophis má hmotnosť $4{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg}$ a pri zrážke by dopadol na Zem rýchlosťou $12\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Počas dopadu Tunguzského telesa v roku 1908 sa uvoľnila energia asi 20 megaton TNT (TNT je výbušnina trinitrotoluén). Vypočítajte, aká energia by sa uvoľnila pri dopade Apophisu na Zem. Uvádzame, že 1 megatona TNT odpovedá energii $4{,}184 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}$. Porovnajte s dopadom Tunguzského telesa.

6.1.2 AO 2016, úloha 4 – Plávajúca doska na inej planéte

Doska z ľahkého dreva má rozmery $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ a je hrubá $10\,\mathrm{cm}$ (a x b x h). Hustota ľahkého dreva $\rho_\mathrm{D} = 500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Doska pláva na vode s hustotou $\rho_\mathrm{V} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ tak, že polovica hrúbky dosky je vo vode a polovica je nad hladinou vody. Ako to bude s doskou na vode na inej planéte, na ktorej povrchu je príťažlivosť 10-krát menšia ako na Zemi?
Pri uvažovaní Vám môže pomôcť prepočítanie prípadu plávajúcej dosky na vode na Zemi. Predpokladajme, že ostatné podmienky na planéte (teplota, tlak a pod.) sú rovnaké ako na Zemi a neuvažujme žiadne iné vplyvy.

6.2 Kategória ZŠ, finále

6.2.1 AO 2008, úloha 2 – Slnko

Zdrojom energie Slnka sú termonukleárne reakcie prebiehajúce v jeho jadre pri premene vodíka na hélium. Pri tejto premene nastáva hmotnostný deficit, čo znamená, že celková hmotnosť jadra atómu hélia je menšia ako súčet hmotností jadier atómov vodíka, ktoré do reakcie vstúpili.

(a) O koľko ton sa zmenší hmotnosť Slnka za jeden deň?

(b) Koľko rokov by trvalo, kým by Slnko vyžiarilo všetku energiu odpovedajúcu jeho pokojovej hmotnosti?

6.2.2 AO 2009, úloha 4 – Energia asteroidu

Teleso asteroidálneho typu s hmotnosťou 100 kg vniklo do zemskej atmosféry rýchlosťou $v = 40\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Na zemský povrch dopadol meteorit s hmotnosťou 10 kg. Z pozorovaní vieme, že pohybová energia telesa sa premení v pomere 10000:100:1 na energiu tepelnú, svetelnú a ionizačnú.

(a) Vypočítajte veľkosť svetelnej energie, ktorá sa uvoľnila pred dopadom meteoritu na zemský povrch.

(b) Vypočítajte, ako dlho by musela svietiť žiarovka príkonom 100 W, aby sa vyžiarila rovnaká energia.

6.2.3 AO 2010, úloha 3

Typický biely trpaslík má hmotnosť približne 0,6 násobku hmotnosti Slnka a táto hmotnosť je stlačená do telesa s veľkosťou našej Zeme.

(a) Vypočítajte priemernú hustotu bieleho trpaslíka.

(b) Keby sa Zem stlačila tak, že by mala hustotu bieleho trpaslíka, aký polomer by mala stlačená Zem?

6.2.4 AO 2010, úloha 4

Na povrchu planéty Kvark je gravitačné zrýchlenie $20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Planéta má rovnaký polomer ako naša Zem. Vypočítajte, akú hmotnosť má planéta Kvark v porovnaní so Zemou.

6.2.5 AO 2012, úloha 1 – Plávajúca doska na exoplanéte

Ak na Zemi ponoríme dosku z ľahkého dreva do vody, bude plávať tak, že polovica hrúbky dosky bude ponorená vo vode a polovica bude nad hladinou vody. Ako to bude vyzerať s tou istou doskou na exoplanéte, na ktorej povrchu je príťažlivosť 10x menšia ako a Zemi? (do akej hĺbky sa ponorí vo vode?) Predpokladajme, že ostatné podmienky na exoplanéte (teplota, tlak a pod.) sú rovnaké ako na Zemi a neuvažujme žiadne iné vplyvy.
Potrebné údaje:
Doska z ľahkého dreva má rozmery $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ a je hrubá $10\,\mathrm{cm}$ (a x b x h), ponorenie $5\,\mathrm{cm}$. Hustota ľahkého dreva $\rho_\mathrm{D} = 500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Hustota vody $\rho_\mathrm{V} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Gravitačné zrýchlenie na exoplanéte $g_\mathrm{P} = 1\,\mathrm{m/s^2}$.
Pri uvažovaní vám môže pomôcť prepočítanie prípadu plávajúcej dosky na vode na Zemi.

6.2.6 AO 2012, úloha 3

Vedci nedávno objavili superzem pri blízkej hviezde. Materskú hviezdu vzdialenú približne 22 svetelných rokov obehne táto exoplanéta raz za 28 dní. Hmotnosť superzeme vedci odhadli asi 4,5-krát väčšiu ako hmotnosť Zeme. Ak predpokladáme, že hustota oboch telies je rovnaká, aký je polomer superzeme?

6.3 Kategória SŠ, domáce kolo

6.3.1 AO 2008, úloha 4

Predpokladajme, že Slnko by sa zmrštilo bez úniku látky do priestoru. Vznikla by neutrónová hviezda s polomerom 10 km. Vypočítajte rotačnú periódu takejto neutrónovej hviezdy.

6.3.2 AO 2009, úloha 2

Predpokladajme, že hustota Zeme v oblasti mimo jadra je $3500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a hustota jadra (vonkajšieho i vnútorného) je v celom jeho objeme rovnaká. Polomer jadra je 3470 km.
Aká musí byť hustota jadra keď priemerná hustota Zeme je $5500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$?

6.3.3 AO 2011, úloha 6

Ľad s teplotou $-10\,°\mathrm{C}$ a plochou $50\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$ je vystavený v čiernej tepelne izolovanej nádobe slnečnému žiareniu, ktoré dopadá naň kolmo za normálneho atmosférického tlaku. Hrúbka ľadu je 1 cm. Ľad sa rozpustí za 58 min.

Užitočné konštanty:
Hustota ľadu: $\rho_{\text{ľad}} = 917\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Merná tepelná kapacita vody: $c_{\mathrm{H_2O}} = 4180\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$
Skupenské teplo topenia ľadu: $L_{\text{t,ľad}} = 334\,000\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$

(a) Vypočítajte celkový žiarivý výkon Slnka. Porovnajte s tabuľkovými hodnotami, určte rozdiel v percentách a zdôvodnite.

(b) Ako dlho by sa rozpúšťal rovnako veľký ľad na Marse, ak by sme uvažovali rovnaké podmienky jeho uloženia, za akých sa rozpúšťal na Zemi?

6.3.4 AO 2013, úloha 6

Slnko stráca hmotnosť aj slnečným vetrom. Všetkými smermi prúdia nabité častice, najmä protóny. Ich priemerná hustota vo vzdialenosti Zeme je 8 protónov na $\mathrm{cm^3}$, stredná rýchlosť častíc $320\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Akú hmotnosť (ak tok elektrónov zanedbáme) stratí Slnko za jeden rok? Akú hmotnosť stratilo takto Slnko od svojho vzniku v percentách svojej hmotnosti, ak by bol tento tok rovnaký? Slnko existuje už zhruba $4{,}6 \cdot 10^9$ rokov.

6.3.5 AO 2015, úloha 1 – Jeansovo kritérium

Odvoďte tzv. „Jeansovo“ kritérium – t.j. kritickú hmotnosť hmloviny potrebnú pre vznik hviezd. Hmlovinu považujte za nerotujúcu a sféricky symetrickú. Pomôcka: vychádzajte z rovnosti kinetickej a potenciálnej energie plynu. Potenciálna energia gule je daná vzťahom: $E_\mathrm{P} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$, kde M je hmotnosť, R polomer hmloviny, G gravitačná konštanta.

6.3.6 AO 2015, úloha 2 – Hviezda

Vypočítajte, koľko energie vyžiari hviezda spektrálneho typu A0 populácie I počas pobytu na hlavnej postupnosti až do spotrebovania 30 % všetkých svojich zásob vodíka.

6.3.7 AO 2020, úloha 2 – Pióny v atmosfére

Neutrálny pión π^0 je nestabilná častica s pokojovou hmotnosťou $m_0 = 135{,}0\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$ a so strednou dobou života $\tau = 8{,}4 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{s}$. Rozpadáva sa na dva fotóny $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. Uvažujme jeden pión, ktorý vznikol ako výsledok interakcie kozmického žiarenia s atómami hornej atmosféry. Voči pozemskému pozorovateľovi má tento pión energiu $E = 1\,\mathrm{GeV}$. Musíme zanedbať interakcie piónu s atómami atmosféry.

(a) Určte rýchlosť v piónu voči pozemskému pozorovateľovi a dráhu l ktorú prešiel až kým sa nerozpadol.

(b) Určte maximálny možný rozdiel energií ΔE dvoch fotónov, ktoré vznikajú uvedeným rozpadom voči danému pozorovateľovi.

6.4 Kategória SŠ, finále

6.4.1 AO 2008, úloha 1 – Pulzar

Pulzar v Krabej hmlovine je neutrónová hviezda s hmotnosťou $2{,}8 \cdot 10^{30}$ kg a polomerom 10 km, ktorá rotuje s periódou 30 ms. Od doby jej vzniku keď rotovala s oveľa kratšou periódou, sa spomaľovala tempom, pri ktorom pokles rotačnej kinetickej energie je nepriamo úmerný štvrtej mocnine periódy.
Vypočítajte približne pred akou dobou vybuchla supernova, pri ktorej vznikla táto neutrónová hviezda ak vieme, že súčasná pozorovaná časová derivácia periódy je $5 \cdot 10^{-13}$.

6.4.2 AO 2010, úloha 5

Ako ďaleko od Slnka bude kométa s polomerom 50 km, keď sa začne tvoriť jej metánová koma? Kritický bod metánu je -82 °C.

6.4.3 AO 2016, úloha 2

Dokážte, že gravitačné pole Slnka by neudržalo elektróny v slnečnej koróne, ktorá má teplotu 10^6 K. Zdôvodnite, prečo aj napriek tomu zostávajú v slnečnej koróne.

6.4.4 AO 2020, úloha 2 – Prečo svietia hviezdy

Prečo Slnko svieti a čo je zdrojom jeho energie? Odpoveď na túto otázku dnes už poznáme. V minulosti mali ale vedci úplne iné predstavy o zdroji energie Slnka ako máme dnes. V tejto úlohe sa pozrieme na niektoré historické teórie a taktiež aj na to, čo si myslíme o zdroji energie Slnka v súčasnosti.

Padajúce kométy
Prvá teória formulovaná J. R. Mayerom tvrdila, že zdrojom energie Slnka sú kométy dopadajúce na Slnko. Predpokladajte, že kométy dopadajú na Slnko rýchlosťou $20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ a že všetka kinetická energia kométy dopadajúcej na Slnko sa premení na žiarenie Slnka. Kométy majú priemernú hustotu $0{,}6\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ a polomer okolo 5 km.

(a) Aká je celková hmotnosť a počet komét, ktoré by museli dopadnúť na Slnko za rok?

(b) Priemerná hustota hmoty v páse asteroidov je $4{,}3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Väčšina telies hlavného pásu asteroidov sa nachádza medzi 2,06 au a 3,27 au od Slnka, hrúbka pásu je 1 au. Ako dlho by Slnko svietilo, ak by naň postupne dopadli všetky objekty pásu asteroidov? Rýchlosť dopadu opäť predpokladajte ako $20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Aký násobok hmoty hlavného pásu asteroidov by musel dopadnúť na Slnko, aby mohlo svietiť 4,6 miliardy rokov?

Gravitačná kontrakcia

Ďalšia teória o vyžarovaní Slnka bola vymyslená H. Helmholtzom a neskôr vylepšená W. Thomsonon. Zdrojom energie Slnka mala byť gravitačná kontrakcia - Slnko sa malo zmršťovať a svoju gravitačnú potenciálnu energiu premieňať na žiarenie.

(c) Za predpokladu, že luminozita Slnka je počas celej doby existencie Slnka konštantná, vypočítajte hornú hranicu veku Slnka.

Gravitačná potenciálna energia gule s hmotnosťou M a polomerom R je

$$E_{\mathrm{p}} = -\frac{3GM^2}{5R} \,.$$

Protón-protónový cyklus

V roku 1926 publikoval Arthur Eddington článok The Internal Constitution of Stars, v ktorom argumentoval v prospech teórie, že hlavným zdrojom energie hviezd sú jadrové reakcie - premena vodíka na hélium. Neskôr, keď sa získali dostatočné poznatky z kvantovej fyziky, sa táto teória potvrdila. Jednou z dvoch jadrových reakcií, ktorou hviezdy premieňajú vodík na hélium je tzv. protón-protónový cyklus. Najčastejšia podoba protón-protónového cyklu je

$$^1H + \, ^1H \to \, ^2H + e^+ + \nu_e \,, \tag{6.1}$$

$$^2H + \, ^1H \to \, ^3He + \gamma \,, \tag{6.2}$$

$$^3He + \, ^3He \to \, ^4He + \, ^1H + \, ^1H \,. \tag{6.3}$$

Pozitrón z prvej reakcie takmer vždy anihiluje s elektrónom v jeho okolí, čím sa uvoľní ďalšia energia. Na to, aby prebehla reakcia 6.3 je potrebné, aby reakcie 6.1 a 6.2 prebehli dvakrát. To teda znamená, že celková energia získaná z p-p cyklu je súčtom energie z tretej reakcie a dvojnásobku energií z prvej a druhej reakcie.

(d) Odhaduje sa, že 91% slnečnej energie pochádza z tohto cyklu. Koľko protón-protónových cyklov prebehne v Slnku za 1 sekundu?

CNO cyklus

CNO cyklus je ďalšou z reakcií, ktorou hviezdy premieňajú vodík na hélium. Táto reakcia je hlavným zdrojom energie hviezd hmotnejších ako 1,3 $M_\odot$. CNO cyklus nezávislo predpovedali v 30. rokoch 20. storočia C. von Weizsäcker a H. Bethe. CNO cyklus prebieha nasledujúco

$$^{12}C + \, ^1H \to \, ^{13}N + \gamma \,, \tag{6.4}$$

$$^{13}N \to \, ^{13}C + e^+ + \nu_e \,, \tag{6.5}$$

$$^{13}C + \, ^1H \to \, ^{14}N + \gamma \,, \tag{6.6}$$

$$^{14}N + \, ^1H \to \, ^{15}O + \gamma \,, \tag{6.7}$$

$$^{15}O \to \, ^{15}N + e^+ + \nu_e \,, \tag{6.8}$$

$$^{15}N + \, ^1H \to \, ^{12}C + \, ^4He \,. \tag{6.9}$$

(e) Aká je celková energia v MeV uvoľnená z CNO cyklu?

Kapitola 7

Kozmológia

7.1 Kategória ZŠ, finále

7.1.1 AO 2009, úloha 3, AO 2014, úloha 4 – Dve galaxie

Galaxia A je od nás vzdialená 10 Mpc a galaxia B sa od nás vzďaľuje rýchlosťou $18\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

(a) Ktorá galaxia je od nás ďalej? Aká je vzdialenosť galaxie B?

(b) Na akú vlnovú dĺžku v spektre vzdialenejšej galaxie sa posunie čiara vodíka, ktorej laboratórna vlnová dĺžka je $\lambda_0 = 121{,}6\,\mathrm{nm}$?

(c) Aká je pozorovaná vlnová dĺžka čiary z úlohy (b) v spektre galaxie A?

7.2 Kategória SŠ, domáce kolo

7.2.1 AO 2007, úloha 3

Pri meraní spektra vzdialenej galaxie sa zistilo, že čiara vodíka s pokojovou vlnovou dĺžkou $\lambda_0 = 434\,\mathrm{nm}$ má v spektre vlnovú dĺžku $\lambda = 460\,\mathrm{nm}$. Akou veľkou rýchlosťou sa galaxia od nás vzďaľuje?

7.2.2 AO 2008, úloha 2 – Vzdialenosť galaxie

Ako ďaleko je galaxia, ktorej čiaru O III pozorujeme na vlnovej dĺžke 500,7 nm, pričom jej laboratórna vlnová dĺžka je 499,5 nm.

7.2.3 AO 2009, úloha 4 – Čierna diera

(a) Aký priemer by mala čierna diera s hmotnosťou Zeme?

(b) Akú by mala hustotu?

(c) Môže existovať čierna diera s hustotou vody? Ak nie, prečo? Ak áno, aký veľký by mala priemer?

Poznámka: Za polomer čiernej diery sa klasicky považuje vzdialenosť, v ktorej rýchlosť fotónu nestačí na opustenie čiernej diery.

7.2.4 AO 2010, úloha 5 – Čierne diery

Vypočítajte hustotu

(a) superhmotnej čiernej diery s celkovou hmotnosťou 108 $M_\odot$,

(b) čiernej diery s hmotnosťou 5 $M_\odot$.

7.2.5 AO 2011, úloha 2

Galaxia sa od nás vzďaľuje rýchlosťou $2{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Čo sa stane s čiarou H$\alpha$, $\lambda_0 = 656{,}5\,\mathrm{nm}$, ktorú pozorujeme v jej spektre. Vyjadrite kvantitatívne.

7.2.6 AO 2011, úloha 3

Aká je hmotnosť čiernej diery s hustotou vody? Vieme, že Schwarzschildov polomer je vyjadrený ako $R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}$.

7.2.7 AO 2015, úloha 3 – Nadsvetelný výtrysk

V okolí mnohých extragalaktických objektov pozorujeme unikajúce štruktúry – prúdy, výtrysky, bubliny, atď. Pozorovania ukazujú, že mnohé z týchto výtryskov sa pohybujú zdanlivo nadsvetelnými rýchlosťami. Skutočné rýchlosti musia byť v súlade s teóriou relativity menšie ako rýchlosť svetla vo vákuu. Zdanlivé nadsvetelné rýchlosti sú dôsledkom geometrického efektu relativisticky sa pohybujúceho výtrysku, za predpokladu, že výtrysk sa deje smerom k nám (resp. smerom od nás) a rýchlosť svetla je konečná. Ak pozorovaná rýchlosť výtrysku v_z (meraná kolmo na zorný lúč) je nadsvetelná a uhol smeru výtrysku a zorného lúča je α, ukážte, že vlastná (skutočná) rýchlosť je menšia ako rýchlosť svetla vo vákuu c. Konkrétny výpočet urobte pre výtrysk so zdanlivou rýchlosťou $v_\mathrm{z} = 10c$, $\alpha = 10°$.

7.2.8 AO 2015, úloha 4 – Galaxie

Základným predpokladom kozmologických modelov je, že vesmír je homogénny, t.j. obsahuje všade rovnaké množstvo hmoty (galaxií). Tento fakt sa dá overiť pozorovaním magnitúdového rozdelenia galaxií. Vypočítajte pomer počtu galaxií $m+1$ magnitúdy N_{m+1} k počtu galaxií m magnitúdy N_m za týchto predpokladov:

(a) Skúmané galaxie sú rozložené v celom vesmíre homogénne s koncentráciou ρ.

(b) Absolútna jasnosť všetkých skúmaných galaxií je rovnaká.

7.2.9 AO 2017, úloha 1 – Reliktné žiarenie

Stredná hodnota reliktného žiarenia je v súčasnosti $T = 2{,}73\,\mathrm{K}$, a jeho červený posun je $z = 1100$. Hustoty tmavej energie, tmavej hmoty a normálnej hmoty, ako zložiek vesmíru sú: $\rho_\Lambda = 6{,}7 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, $\rho_\mathrm{DM} = 2{,}4 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, a $\rho_\mathrm{NM} = 0{,}5 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Aký je pomer medzi hustotou tmavej hmoty a hustotou tmavej energie v čase, keď reliktné žiarenie bolo vyžiarené, ak predpokladáme, že tmavá energia je energiou vákua?

7.2.10 AO 2019, úloha 2 – Čierna diera

(a) Aký priemer by mala čierna diera s hmotnosťou Zeme?

(b) Akú by mala hustotu?

7.2.11 AO 2019, úloha 4 – Výtrysk jetu

Pomocou rádiointerferometrickej metódy s veľkou základňou bol monitorovaný rádiový zdroj žiarenia, vzdialený $d = 20\,\mathrm{Mpc}$. V určitom momente bol zaregistrovaný výtrysk jetu pod uhlom $\alpha = 30°$ voči zornému lúču. Zdroj žiarenia bol pozorovaný presne po 10 rokoch a bolo zaregistrované, že jet sa už nachádza v uhlovej vzdialenosti $\psi = 0{,}0645''$ od rádiového zdroja. Vypočítajte rýchlosť, s akou bol jet vyvrhnutý do priestoru. Predpokladajme, že jet sa pohybuje konštantnou rýchlosťou. Expanziu vesmíru môžeme zanedbať.

7.2.12 AO 2020, úloha 1 – Galaxia

Laboratórna vlnová dĺžka spektrálnej čiary horčíka Mg II je 279,8 nm. Zistili sme, že v spektre galaxie má jej vlnová dĺžka hodnotu 452,3 nm. Vypočítajte

(a) aká je rýchlosť pozorovanej galaxie,

(b) či sa od nás vzďaľuje alebo približuje,

(c) aká je jej vzdialenosť od Zeme.

7.2.13 AO 2023, úloha 3 – Čierna diera

Určte v astronomických jednotkách polomer čiernej diery s hmotnosťou veľkej galaxie, čo je bežne 200 miliárd $M_\odot$ a porovnajte to s našou slnečnou sústavou.

7.3 Kategória SŠ, finále

7.3.1 AO 2007, úloha 3

Laboratórna vlnová dĺžka spektrálnej čiary horčíka Mg II je 279,8 nm. Zistili sme, že v spektre galaxie má jej vlnová dĺžka hodnotu 452,3 nm. Vypočítajte:

(a) aká je rýchlosť pozorovanej galaxie,

(b) či sa od nás vzďaľuje alebo približuje,

(c) aká je jej vzdialenosť od Zeme.

7.3.2 AO 2013, úloha 3

Pozostatkom po stave Vesmíru asi 390000 rokov po Veľkom tresku je dodnes pozorované reliktné žiarenie s maximom vyžarovania pri $\lambda = 1{,}06\,\mathrm{mm}$. To sa oddelilo od látky posledným rozptylom na časticiach na konci éry žiarenia.

(a) Vypočítajte, v akej vlnovej dĺžke elektromagnetického žiarenia bolo vtedy maximum vyžarovania, ak jeho dnešná hodnota teploty je $T = 2{,}725\,\mathrm{K}$.

(b) Aký je dnes červený posun z mikrovlnného žiarenia kozmického pozadia?

7.3.3 AO 2016, úloha 3

Rádiový zdroj v centre aktívnej galaxie má uhlový rozmer $0{,}001''$, kozmologický červený posuv je $z = 0{,}5$. Vypočítajte lineárne rozmery rádiového zdroja v pc.

7.3.4 AO 2023, úloha 3.2 – O vesmíre

Za predpokladu, že faktor škály a je úmerný $t^{2/3}$, kde t je vek vesmíru, vypočítajte v $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ hustotu normálnej hmoty, tmavej hmoty a tmavej energie v čase, kedy bol vek vesmíru 8 miliárd rokov. Parameter hustoty normálnej hmoty v súčasnosti je $\Omega_{\mathrm{N},0} = 0{,}049$, tmavej hmoty $\Omega_{\mathrm{DM},0} = 0{,}259$ a tmavej energie $\Omega_{\mathrm{DE},0} = 0{,}691$. Parameter hustoty sa vypočíta ako $\Omega = \frac{\rho}{\rho_\mathrm{C}}$, kde je kritická hustota vesmíru $\rho_\mathrm{C} = 9 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Hustota tmavej energie nezávisí na škálovom faktore a. Vesmír je v súčasnosti starý približne 14 miliárd rokov.

Kapitola 8

Rozsiahle príklady

8.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

8.1.1 AO 2007, úloha 5

Na obrazovku monitora pri rozlíšení 800 x 600 pixelov chceme zobraziť jednoduchú mapku oblohy, ktorá by zobrazovala hviezdy do 5. magnitúdy tak, aby svetový rovník prechádzal vodorovne stredom monitora. Zobrazenie, ktoré použijeme je tzv. štvorcové a teda rektascenzia na mapke narastá zľava doprava tak, že na jeden stupeň pripadá k pixelov a deklinácia narastá zdola nahor s tou istou mierkou k.

(a) Akú veľkosť konštanty k zvolíme, aby v mapka obsahovala hviezdy s rektascenziou od 140° do 220°?

(b) Aká hodnota deklinácie bude pri spodnom okraji obrazovky a aká pri hornom okraji?

(c) Odvoďte vzorec na výpočet súradnice x hviezdy v závislosti na rektascenzii α a vzorec na výpočet súradnice y z deklinácie δ, ak sa obidve veličiny sa zadávajú v stupňoch a ľavý dolný roh monitora má súradnice $(0, 0)$.

(d) Aké budú súradnice (x, y) obrazu hviezdy Regulus ($\alpha = 10^{\mathrm{h}}\,08^{\mathrm{m}}$, $\delta = -11°58'$)?

(e) Ak budeme hviezdy 5. magnitúdy zobrazovať ako body pozostávajúce z jedného pixela, aký priemer kotúčika (v pixloch) by mal mať obraz hviezdy 0. magnitúdy? Vychádzajte z požiadavky, aby plochy kotúčikov obrazov hviezd rôznych jasností boli úmerné osvetleniu týchto hviezd.

8.2 Kategória ZŠ, finále

8.2.1 A0 2007, úloha 5, AO 2010, úloha 2

(a) Vypočítajte, aký bude mať Mesiac na oblohe uhlový rozmer v oblúkových sekundách, ak je v strednej vzdialenosti od Zeme. Uvažujte kruhovú dráhu.

(b) Mesiac bude 27. 5. 2007 v apogeu vzdialený od Zeme 405 000 km. O koľko percent by stúpla jeho jasnosť v perigeu 15. 5. 2007 vo vzdialenosti 360 000 km?

(c) Mohlo by nastať prstencové zatmenie Slnka, ak by Zem bola v aféliu a Mesiac v apogeu?

8.2.2 AO 2008, úloha 4 – Zákrytová dvojhviezda

V spektre zákrytovej dvojhviezdy pozorujeme spektrálnu čiaru sodíka D1 s laboratórnou vlnovou dĺžkou $\lambda = 5895{,}9$ Å. V nasledujúcej tabuľke sú vlnové dĺžky tejto čiary λ_1, λ_2 pre jednotlivé zložky pozorované pozorovateľom na Zemi v priebehu niekoľkých dní.

Dni	$\lambda_1 - 5800$ (Å)	$\lambda_2 - 5800$ (Å)
0,3	97,5	93,1
0,6	97,7	92,8
0,9	97,2	93,7
1,2	96,2	96,2
1,5	95,1	97,3
1,8	94,3	98,7
2,1	94,1	99,0
2,4	94,6	98,1
2,7	95,6	96,4
3,0	96,7	94,5
3,3	97,3	93,1
3,6	97,7	92,8
3,9	97,2	93,7
4,2	96,2	96,2
4,5	95,0	97,4
4,8	94,3	98,7

Vypočítajte:

(a) Periódu dvojhviezdy.

(b) Pomer hmotností zložiek.

8.2.3 AO 2011, úloha 4, AO 2013, úloha 3

Vypočítajte maximálny Dopplerov posun v spektre hviezd vyvolaný pohybom Zeme okolo Slnka. Uvažujte vlnovú dĺžku 550 nm a kruhovú dráhu Zeme.

8.3 Kategória SŠ, domáce kolo

8.3.1 AO 2007, úloha 1

Materskou kométou najznámejšieho meteorického roja Perzeíd je kométa 109P/Swift Tuttle. Jej obežná doba okolo Slnka je asi 125 rokov. Zem prechádza priesečníkom dráh v čase, keď má Slnko ekliptikálnu dĺžku 140°. Naposledy bola pozorovaná v roku 1992, kedy preletela uzlom svojej dráhy na poludnie 4 dni pred jesennou rovnodennosťou.

(a) Určite veľkosť hlavnej polosi kométy.

(b) Vypočítajte strednú obvodovú rýchlosť kométy v km/s. Počítajte s kruhovou dráhou.

(c) Za aký čas kométa preletí vzdialenosť o veľkosti priemeru Zeme, ak jej geocentrická rýchlosť je 60 km/s?

(d) Kedy nastáva maximum činnosti meteorického roja, t.j. Zem prechádza „stredom“ dráhy kométy. Uveďte dátum a čas s presnosťou na hodiny (excentricitu dráhy Zeme zanedbajte).

(e) Ako ďaleko bola kométa od Zeme v okamihu prechodu uzlom svojej dráhy? Výsledok uveďte s presnosťou na desatiny AU.

(f) Aká bola vtedy absolútna jasnosť kométy, ak bola vizuálne pozorovaná ako 6^m?

8.3.2 AO 2009, úloha 3

Z čiarového spektra zákrytovej dvojhviezdy bola zistená obežná doba 8,6 roka. Maximálna hodnota Dopplerovho posunu čiary Hα s vlnovou dĺžkou 656,273 nm je $\Delta_1 = 0{,}026$ nm pre prvú zložku a $\Delta_2 = 0{,}052$ nm pre druhú zložku. Zo sínusového charakteru krivky radiálnych rýchlostí vyplýva, že dráhy sú blízke kruhovým. Zistite z uvedených údajov hmotnosti jednotlivých zložiek dvojhviezdy.

(a) Aký je vzájomný pomer hmotností obidvoch zložiek Z_1 a Z_2?

(b) Ktorá zložka je hmotnejšia?

(c) Aké sú hmotnosti zložiek?

8.3.3 AO 2014, úloha 4 – Milisekundový pulzar

V súhvezdí Veľryba vybuchla supernova SN 2019A. Astronómovia zistili, že po výbuchu supernovy ostal milisekundový pulzar, ktorého frekvencia sa menila v rozsahu od 699,650 175 Hz do 700,350 175 Hz s periódou 4,5 dňa. Presné fotometrické a spektroskopické pozorovania ukázali, že sa jedná o zákrytový systém, v ktorom pulzar obieha okolo červeného obra po kruhovej dráhe a že spektrálna čiara ionizovaného vápnika s vlnovou dĺžkou 3933,66 Å mení svoju polohu o ±0,63 Å. Pomocou strednopásmovej (Strömgrenovej) fotometrie určili hmotnosť červeného obra na 5 $M_\odot$. Vypočítajte polos dráhy dvojhviezdy.

8.3.4 AO 2021, úloha 2 – Zachytenie statického bolidu

Úvodom si predstavte, že v jeden deň máte toľko šťastia a zdrojov, že si zakúpite novú kameru a objektív, pretože sa chystáte s nimi vykonávať úchvatný astronomický výskum. V momente ako rozložíte aparatúru a začnete snímať sa stane to, že presne v zornom poli vášho objektívu sa objaví statický meteor (svietiaci bod), dokonca je to silný bolid. To aké parametre má vysnená aparatúra nájdete v priložených tabuľkách 8.1 a 8.2. Kamera `Moravian Instrument C4-16000` je top `CMOS` kamera so snímačom priamo vyvinutým na vedeckú prácu a `RedCat 51` je v súčasnosti `APO` teleobjektív ktorý si získava širokú obľúbenosť.

Tabuľka 8.1: Parametre objektívu.

Veličina	Hodnota
Typ	APOchromat
Priemer D	51 mm
Ohnisková vzdialenosť f	250 mm
Svetelnosť F	

Tabuľka 8.2: Parametre kamery.

Veličina	Hodnota
Typ	APOchromat
Rozlíšenie	4096 px x 4096 px
Veľkosť pixelu p^2	9 µm × 9 µm
Veľkosť snímača s^2	36,8 mm^2 × 36,8 mm^2

(a) Vypočítajte svetelnosť ďalekohľadu, ktorú výrobca zabudol napísať. Predpokladajte, že apochromát je naozaj vysokej kvality a teda všetky viditeľné vlnové dĺžky sa v optickej sústave správajú identicky.

(b) Vypočítajte rozlišovaciu schopnosť ďalekohľadu θ. Spektrum na akom vyžaruje typická perzeida je na obrázku 8.1. Prácu s grafom obídeme nájdením si vyžarovacej spektrálnej línie v tabuľkách. Použijeme čiaru Na I, pretože je najsilnejšia a zároveň je najvýraznejšia vo viditeľnej oblasti smerom k väčším vlnovým dĺžkam. (Môžete si rozmyslieť prečo je to vhodné.) $\lambda_{\mathrm{NaI}} = 5889{,}950$ Å.

(c) Vypočítajte rozlišovaciu schopnosť kamery v optickej sústave Δ. Tj. zistite na koľko pixelov sa zobrazí bodový zdroj svetla, keď využijete znalosť z predchádzajúcej úlohy.

(d) Napíšte krátku úvahu aké ďalšie faktory ovplyvňujú rozostrenie obrazu bolidu. Bolid je jasný meteor ale na oblohe kvôli svojej malej veľkosti je stále bodový zdroj svetla. Doteraz ste riešili že bodový zdroj sa nezobrazí na snímači ako bod kvôli difrakcií na objektíve. Aké ďalšie efekty, na základe charakteristiky aparatúry, nepriaznivo ovplyvňujú pozorovanie.

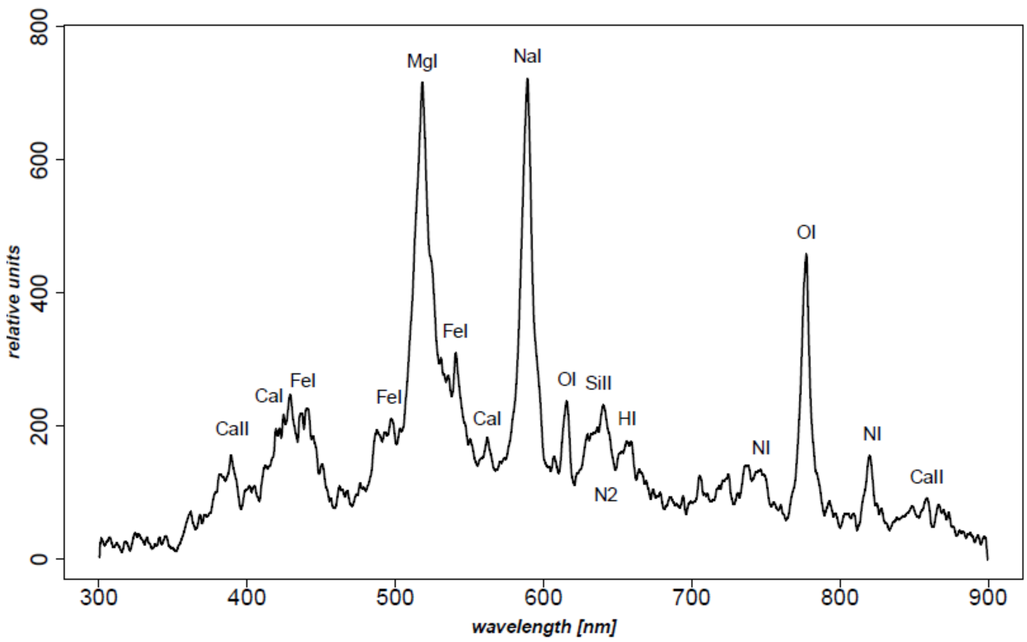
(e) Vypočítajte svetelný tok bolidu na snímač F. Bolid mal hviezdnu veľkosť $m = -5\,\mathrm{mag}$, to ste zistili z pozorovania `AMOS`. Ďalej viete, že Vega má hviezdnu veľkosť $m_\mathrm{V} = 0\,\mathrm{mag}$ a, že $L_\mathrm{V} = 58\,L_\odot$ a $r_\mathrm{V} = 25{,}3\,\mathrm{ly} = 7{,}8\,\mathrm{pc}$.

(f) Vypočítajte aký uhlovo veľký je meteor ϕ. Keď ho pozorujeme zo Zeme ktorú aproximujeme hladinou oceánu a bolid sa nachádzal vo výške $H = 80\,\mathrm{km}$ a vďaka informácií z programu `AMOS` sa nachádzal $L = 100\,\mathrm{km}$ od vás v horizontálnej rovine. Priemer meteoroidu ktorý vyvolal bolid bol $d = 10\,\mathrm{cm}$. Ovplyvní to výsledok úlohy (e)?

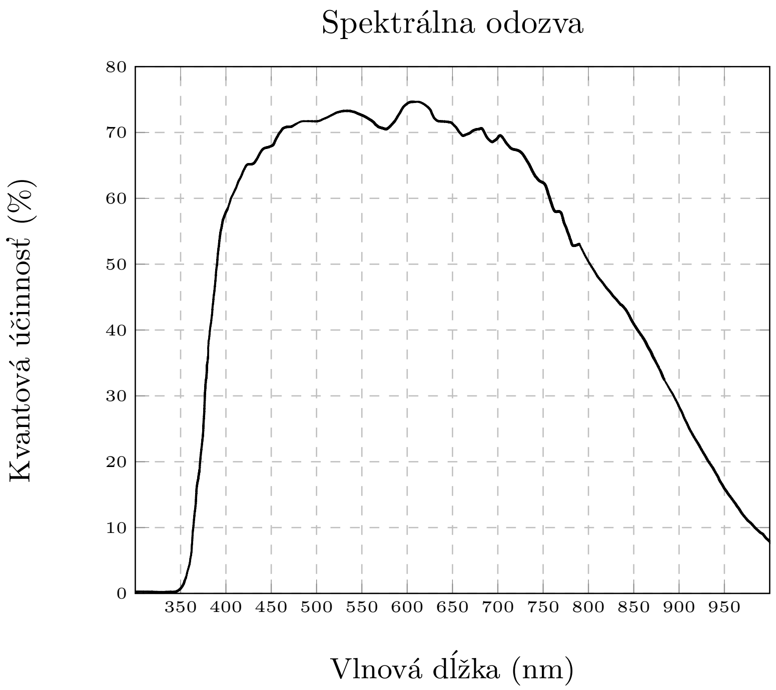
(g) Vypočítajte o aký uhol ε sa posunie meteor počas toho ako žiari. Predpokladajte, že meteor je statický zdroj svetla v nekonečne, a že ste ho pozorovali na nebeskom rovníku. Bolid žiaril po dobu $T = 6\,\mathrm{s}$.

(h) Vypočítajte hodinový uhol bolidu t. Z informácií v zadaniach predchádzajúcich úloh viete vypočítať, čomu je rovná výška pozorovania bolidu $h[°]$ a potrebujete ešte vedieť svoju zemepisnú šírku $\phi = 48{,}934\,738°$, čo je presná súradnica observatória v Kolonickom sedle.

(i) Vypočítajte či je možné aby snímač zachytil bolid, ak viete, že priepustnosť optickej sústavy je $\eta_0 = 0{,}99$ a kvantová účinnosť čipu je $\eta_\mathrm{S} = 0{,}7$ pre vlnovú dĺžku Na I. Zároveň viete, že minimálne množstvo energie na aktiváciu pixelu je $E_\mathrm{min} = 1\,\mathrm{nJ}$.



Obr. 8.1: Spektrálna charakteristiky typickej Perzeidy, zdroj: fmph.uniba.sk.



Obr. 8.2: Závislosť kvantovej účinnosti čipu na vlnovej dĺžke svetla.

8.4 Kategória SŠ, finále

8.4.1 AO 2008, úloha 4 – Zákrytový binárny systém

Ak sa pozorovateľ nachádza presne v rovine dráhy dvojhviezdy, môže pozorovať vzájomné zákryty jej zložiek. Predpokladajme, že zložky takejto dvojhviezdy obiehajú okolo spoločného ťažiska po kruhových dráhach s uhlovou rýchlosťou ω, povrchové teploty týchto hviezd sú T_1 a T_2 ($T_1 > T_2$) a odpovedajúce polomery R_1 a R_2 ($R_1 > R_2$). Presné merania ukázali, že svetlo prichádzajúce z týchto hviezd v okamihoch odpovedajúcich minimám odpovedá 90% a 63% maximálneho toku spoločného svetla ($F = 4{,}8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$) oboch hviezd.

V spektre tejto dvojhviezdy pozorujeme spektrálnu čiaru sodíka D1 s laboratórnou vlnovou dĺžkou $\lambda = 5895{,}9\,\text{Å}$. V nasledujúcej tabuľke sú vlnové dĺžky tejto čiary λ_1, λ_2 pre jednotlivé zložky pozorované pozorovateľom na Zemi v priebehu niekoľkých dní. Počiatok vodorovnej osi na obrázku v predchádzajúcom príklade a v tejto tabuľke je zhodný.

Dni	$\lambda_1 - 5800$ (Å)	$\lambda_2 - 5800$ (Å)
0,3	97,5	93,1
0,6	97,7	92,8
0,9	97,2	93,7
1,2	96,2	96,2
1,5	95,1	97,3
1,8	94,3	98,7
2,1	94,1	99,0
2,4	94,6	98,1
2,7	95,6	96,4
3,0	96,7	94,5
3,3	97,3	93,1
3,6	97,7	92,8
3,9	97,2	93,7
4,2	96,2	96,2
4,5	95,0	97,4
4,8	94,3	98,7

Vypočítajte:

(a) Hmotnosť každej zložky.

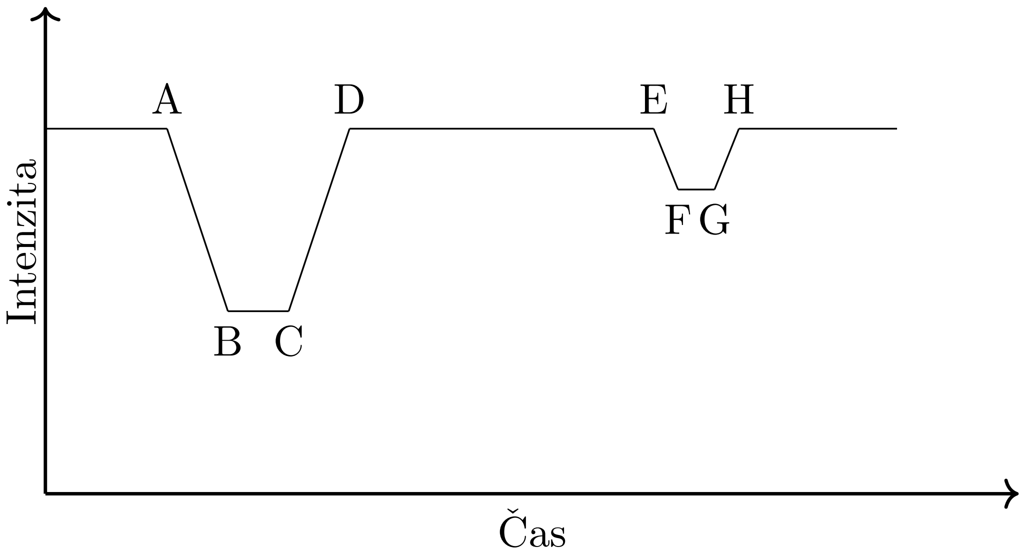
(b) Pomery povrchových teplôt T_1/T_2 a polomerov R_1/R_2 zložiek dvojhviezdy.

(c) Aká je maximálna možná uhlová vzdialenosť zložiek pre pozorovateľa na Zemi? Využite nasledujúci empirický vzťah medzi žiarivým výkonom a hmotnosťou hviezdy

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,8} . \tag{8.1}$$

8.4.2 AO 2011, úloha 2, AO 2015, úloha 1

Zákrytová dvojhviezda má obežnú periódu 30 dní. Svetelná krivka na obrázku ukazuje, že sekundárna zložka zakrýva primárnu hviezdu od bodu A do bodu D (merané od prvého do posledného kontaktu a toto trvá 8 hodín), od bodu B do bodu C je úplný zákryt a tento trvá 1 hod a 18 min. Analýza radiálnych rýchlostí dáva radiálnu rýchlosť primárnej hviezdy $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ a sekundárnej hviezdy $40\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Ak predpokladáme kruhové dráhy a sklon dráhy $i = 90°$, vypočítajte polomery a hmotnosti obidvoch zložiek dvojhviezdy a vyjadrite ich v jednotkách polomeru a hmotnosti Slnka.



8.4.3 AO 2013, úloha 1

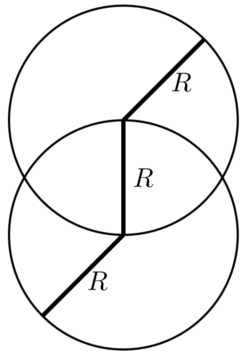
Najbližším susedom Slnka je vo vzdialenosti 1,3 pc viacnásobný systém $\alpha_{1,2}$ Proxima Centauri. V rovníkovej sústave súradníc má približne súradnice $\alpha = 14^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}$ a $\delta = -61°$ a premieta sa do u nás z veľkej časti neviditeľného súhvezdia Kentaura. Ak by sme sa rýchlo premiestnili k tejto hviezde, tvar väčšiny súhvezdí by sa príliš nezmenil, na oblohe by ale pribudla jedna nová hviezda: Slnko.

(a) Uveďte, aké budú rovníkové súradnice Slnka pri pozorovaní z blízkosti tejto hviezdy.

(b) V ktorom súhvezdí sa bude Slnko nachádzať? Predpokladajme, že sústava súradníc je orientovaná rovnako.

(c) Akú zdanlivú jasnosť by na tejto oblohe malo Slnko?

8.4.4 AO 2016, úloha 1 – Zákrytová dvojhviezda



Majme zákrytovú dvojhviezdu s rovnako veľkými zložkami $R_1 = R_2 = R$, kde primárne minimum bude to, pri ktorom je v popredí chladnejšia zložka (teplota T_2) pred teplejšou hviezdou (teplota T_1). Zákryt je taký, že pri pohľade zo Zeme zasahuje predná hviezda svojím okrajom presne na stred zakrývanej hviezdy (viď obrázok). Nech $R_1 = R_2 = R = 2{,}2\,R_\odot$, $T_1 = 10\,000\,\mathrm{K}$, $T_2 = 8000\,\mathrm{K}$ a vzdialenosť stredov zložiek (dráha nech je kruhová) $r = 10R$. Vypočítajte sklon relatívnej dráhy dvojhviezdy i k rovine kolmej na zorný lúč a pokles jasnosti Δm v magnitúdach v primárnom minime voči jasnosti mimo zákrytu.

8.4.5 AO 2018, úloha 1 – Slnečné neutrína

Neutrínová astronómia je jedným z mladých oborov astronómie, umožňuje vedcom nahliadnuť hlboko do slnečného vnútra. Tu elektrónové neutrína ν_e - slabo interagujúce ľahké častice - vznikajú v rámci p-p cyklu:

$$4\mathrm{p} \rightarrow^4 \mathrm{He} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu_\mathrm{e} + 4{,}28 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}\,.$$

Na Zemi boli postavené veľké detektory na ich skúmanie. Modelujme náš detektor ako valec s rozmermi $R = 20\,\mathrm{m}$ a $h = 40\,\mathrm{m}$. Je celkom naplnený vodou a po obvode má tisícky fotonásobičov, ktoré číhajú na slabé záblesky pochádzajúce z reakcie neutrín s látkou. Účinný prierez pre túto interakciu (t.j. plocha pod akou vidí prichádzajúce neutríno cieľové častice - uvažujte molekuly vody) je pritom len asi $\sigma = 10^{-47}\,\mathrm{m}^2$.

(a) Ak je slnečná konštanta $S = 1366\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, skúste odhadnúť, koľko neutrín by mohol detektor zachytiť počas jedného roka.

V skutočnosti je toto číslo o niekoľko rádov nižšie než vyplýva z a), keďže len malá časť neutrín dosiahne energiu potrebnú na túto špecifickú reakciu s látkou v detektore. Aj po vykonaní všetkých potrebných teoretických opráv však vedci zistili, že stále detegujú iba $y = 40\,\%$ v porovnaní s teóriami postavenými na štandardnom modeli Slnka. Vyzeralo to už, že sa slneční astronómovia mýlili v svojich modeloch štruktúry vnútra našej hviezdy.

Podľa hypotézy neutrínových oscilácií však existujú tri druhy neutrín, ktoré sa môžu na seba vzájomne dosť čudným spôsobom premieňať: elektrónové (ν_e) a miónové, tauónové (spoločne značené ν_x). Premena časti ν_e na iné druhy ν_x by mohla vysvetliť nezrovnalosti v pozorovaných počtoch netrín.

(b) Za predpokladu, že detektor má účinnosť pre ν_x iba 1/7 z tej pre ν_e, vypočítajte, aký relatívny pomer q častíc ν_e sa cestou zo Slnka na Zem muselo premeniť z ν_e na ν_x, $0 < q < 1$.

Dodatočné informácie:

Uvažujte, že všetka energia zo Slnka pochádza z p-p cyklu a tiež, že všetky neutrína pochádzajú zo Slnka. Hmotnosť molekuly vody je $m_{\mathrm{H_2O}} = 3{,}00 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, hustota vody je štandardných $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

8.4.6 AO 2020, úloha 1 – Slnko a Zem

Uvažujme hypotetický prípad, kedy sa Zem začne otáčať okolo svojej osi tak, aby mala so Slnkom viazanú rotáciu (pod. ako má Mesiac so Zemou). V takomto prípade je vždy jedna celá pologuľa Zeme natočená k Slnku a druhá je od neho vždy odvrátená. Teraz ale Zem rozdelíme (cez celú planétu) dokonale izolujúcou stenou ktorá izoluje privrátenú a odvrátenú stranu Zeme. Teda sa neprenáša žiadne teplo z osvetlenej strany na neosvetlenú. Známe veličiny:

- $a_\oplus$ vzdialenosť Zeme od Slnka,
- $R_\oplus$, $R_\odot$ polomer Zeme, Slnka,
- $\lambda_\odot$ vlnová dĺžka na ktorej Slnko vyžaruje najintenzívnejšie,
- všetky fundamentálne konštanty.

(a) Aká je perióda otáčania sa Zeme okolo vlastnej osi keď má viazanú rotáciu? Aký je smer otáčania? Situáciu nakreslite.

(b) Aká je teplota povrchu na privrátenej strane Zeme k Slnku? Uvažujte, že Zem aj Slnko sa správajú ako absolútne čierne teleso. Viete, že všetka energia ktorá dopadá na privrátenú stranu je iba zo Slnka?

(c) Aká je teplota na odvrátenej strane Zeme, na ktorú nedopadá absolútne žiadna energia zo Slnka?

8.4.7 AO 2020, úloha 3 – Štvrťstoročie s exoplanétami

Polovicu Nobelovej ceny za rok 2019 dostali astronómovia D. Queloz a M. Mayor za objav prvej exoplanéty 51 Pegasi b okolo hviezdy hlavnej postupnosti s hmotnosťou $M_{\mathrm{51Peg}} = 1{,}11\,M_\odot$ a žiarivým výkonom $L_{\mathrm{51Peg}} = 4{,}28 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ (rok 1995). Jedná sa o tzv. horúci Jupiter – masívne teleso na krátkej obežnej dráhe.
Planétu objavili vysokocitlivým spektrografom `ELODIE`, ktorý monitoroval vlnovú dĺžku viacerých absorpčných čiar v svetle hviezdy. Vzájomný orbitálny pohyb hviezdy a planéty okolo hmotného stredu má za následok periodický dopplerovský posun spektrálnych čiar okolo strednej hodnoty. Táto stratégia sa nazýva metóda radiálnych rýchlostí.

(a) Planéta bola objavená z dopplerovského signálu s periódou 4,23 dní. Spočítajte strednú vzdialenosť 51 Peg b od materskej hviezdy.

(b) Vlnové dĺžky všetkých čiar v spektre hviezdy oscilujú s malou relatívnou amplitúdou iba

$1{,}85 \cdot 10^{-7}$. Signál má tvar dokonalej sínusoidy a neboli detegované žiadne iné periódy. Za predpokladu, že zorný lúč zo Zeme leží v orbitálnej rovine 51 Peg b, spočítajte hmotnosť planéty. Kvantitatívne popíšte ako by sa interpretácia výsledku zmenila, keby sme neučinili posledný predpoklad o sklone dráhy.

(c) vypočítajte rovnovážnu teplotu planéty, ak má Bondovo albedo[1] 0,2 a vyžaruje ako čierne teleso s homogénnou teplotou. Prečo tento model pravdepodobne nie je v prípade horúceho Jupitera použiteľný?

Napokon opustime systém 51 Peg a zvážme širšiu populáciu hviezd. Najviac nás zaujímajú planéty v obývateľnej zóne, teda v našom zjednodušení v takom intervale vzdialenosti od hviezdy, ktorému zodpovedá povrchová teplota v intervale (0 °C, 100 °C). Uvažujte pre (d) takýto kontext:

- planéta hmotnosti (m) Zeme na kruhovej dráhe okolo materskej hviezdy, v rovine zorného lúča,
- zanedbajte akýkoľvek skleníkový efekt alebo albedo povrchu,
- `ELODIE` má rozlišovaciu schopnosť $v_0 = 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (minimálna rozlíšiteľná amplitúda radiálnej rýchlosti),
- existuje približný vzťah medzi žiarivým výkonom L a hmotnosťou M hviezdy v tvare

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{M^4}{M_\odot^4}\,.$$

(d) Aká je najväčšia hmotnosť hviezdy M, pri akej vie `ELODIE` ledva detegovať vyššie špecifikovanú planétu v obývateľnej zóne? Interpretujte výsledok a jeho vplyv na pozorovateľnosť exoplanét podobných Zemi.

8.4.8 AO 2021, úloha 1 – Merkúr

Merkúr je najbližšia planéta k Slnku zaujímavá pomalou rotáciou a tým, že jeho rotačná os je kolmá na rovinu obehu. Predstavme si, že bývame na rovníku Merkúra.

(a) Ako najvyššie nad obzor sa môže dostať Slnko?

(b) Ako dlho je stred Slnka nad obzorom?

(c) Ako dlho vychádza Slnko nad obzor?

Uvažujte že Merkúr obieha okolo Slnka po kruhovej dráhe s periódou obehu $P = 88$ dní a okolo vlastnej osi sa otočí (prográdne) za $t = 59$ dní.

[1] Albedo (odrazivosť planéty) – bezrozmerné číslo v intervale (0,1) vyjadrujúce pomer odrazeného žiarenia k všetkému dopadajúcemu žiareniu.

V skutočnosti však Merkúr obieha po eliptickej dráhe s pomerne veľkou excentricitou $e = 0{,}2$.

(d) Ako dlho vychádza Slnko nad obzor v aféliu? Môžete použiť informáciu, že v perihéliu sa Merkúr pohybuje rýchlosťou $v_\mathrm{P} = 59\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (vzhľadom na Slnko).

(e) V istom momente sa Slnko na oblohe zastaví a začne sa hýbať opačným smerom. V akej vzdialenosti od Slnka sa vtedy nachádza Merkúr? Pomôcka: Finálnu rovnicu môžete riešiť numericky, napríklad iteračnou metódou.

8.4.9 AO 2021, úloha 2 – Rádioteleskop Arecibo

Rádioteleskop Arecibo bol až do roku 2016 najväčším rádioteleskopom na svete. Počas 57 rokov svojej existencie bolo vďaka nemu uskutočnených množstvo objavov v blízkom i ďalekom vesmíre. Po tom, čo bol teleskop poškodený hurikánom a viacerými zemetraseniami, bolo definitívne rozhodnuté, že je potrebné ho rozobrať a ukončiť jeho prevádzku. Predtým, než sa s tým vôbec začalo, ale praskli zvyšné upevňovacie laná držiace plošinu zavesenú nad ohniskom teleskopu a jej pád ho už definitívne zničil.

(a) Rádioteleskop Arecibo pozoroval vo frekvenciách 300 MHz až 10 GHz. Akú najlepšiu rozlišovaciu schopnosť mohol teoreticky dosiahnuť, ak bol jeho priemer 305 m?

Jedným z jeho prvých objavov bola nová hodnota rotačnej periódy Merkúra. Predtým si vedci mysleli, že rotačná doba Merkúra je zhodná s jeho obežnou dobou okolo Slnka, ktorá je 88 dní. Prístroj dokázal okrem prijímania rádiových vĺn aj vysielať. Pri meraní rotačnej doby Merkúra vyslal k planéte signál s frekvenciou 430 MHz a zachytil ho po odraze od Merkúra.

(b) Časť signálu odrazená od stredu disku Merkúra sa vrátila o 16,3 ms skôr ako časť signálu odrazená od okraja disku Merkúra. Odrazený signál už nemal len jednu frekvenciu, ale kvôli rotácii Merkúra sa jeho frekvencia pohybovala v rozsahu 430 MHz $\pm$ 4,3 Hz. Najnižšia a najvyššia odrazená frekvencia zodpovedajú odrazu od okraja disku planéty, teda miest, kde je rotačná rýchlosť v smere/proti smeru spojnice Zem – Merkúr. Na základe týchto údajov určite rotačnú periódu Merkúra. Vplyv pohybu Merkúra a Zeme okolo Slnka je už z údajov odstránený, netreba ho teda uvažovať.

Ďalším významným objaveným objektom bol prvý známy binárny pulzar PSR B1913+16. Systém sa nachádza v súhvezdí Orol približne 21 000 svetelných rokov od Zeme. Perióda obehu oboch neutrónových hviezd je 7,75 h, počas obehu je ich najmenšia vzájomná vzdialenosť $1{,}1\,R_\odot$ a najväčšia vzájomná vzdialenosť je $4{,}8\,R_\odot$.

(c) Ukázalo sa, že v dôsledku vyžarovania gravitačných vĺn a teda strát energie sa perióda obehu systému skracuje o 76,5 µs za rok. O koľko sa za rok skráti veľká polos systému? Pri výpočte môžu byť užitočné vzťahy:

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)^2 \approx 1 - \frac{2x}{y}\,,$$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)^3 \approx 1-\frac{3x}{y}\,,$$

platiace pre $x \ll y$.

V roku 1974 bola z Areciba smerom k hviezdokope M13 (súradnice: $\alpha_{M13} = 16^{\mathrm{h}}\,41^{\mathrm{m}}\,42^{\mathrm{s}}$, $\delta_{M13} = 36°27'41''$) vyslaná jednoduchá správa popisujúca život na Zemi. Signál bol vysielaný na frekvencii 2380 MHz s výkonom 450 kW. Predpokladajte, že šírka frekvenčného pásma signálu bola 10 Hz.

(d) Vlastný pohyb hviezdokopy M13 v rektascenzii je $\mu_\alpha = 3{,}18 \cdot 10^{-3}\,''\,\mathrm{rok}^{-1}$ a v deklinácii $\mu_\delta = 2{,}56 \cdot 10^{-3}\,''\,\mathrm{rok}^{-1}$, uhlový priemer hviezdokopy je $33'$. Signálu potrvá približne 22 000 rokov, kým sa k nej dostane. Zasiahne vtedy signál ešte nejakú časť hviezdokopy? Predpokladajte, že signál je vysielaný do veľmi malého priestorového uhla zanedbateľného voči uhlovému priemeru hviezdokopy a bol namierený do stredu hviezdokopy.

(e) Dokázali by prípadní mimozemšťania žijúci v hviezdokope zachytiť tento signál, ak ich prístroje sú schopné detegovať žiarenie so spektrálnou intenzitou minimálne 1 mJy? Signál je zo Zeme vysielaný do priestorového uhla $2{,}4 \cdot 10^{-9}$ sr.

8.4.10 AO 2022, úloha 1 – Zachytenie novy

V súčasnosti je už takmer každý jeden objav, ktorý učiníme v astronómií zaznamenaný nie jedným ale dvoma, troma či viacerými prístrojmi. A tak sa aj stalo v tomto hypotetickom prípade (nova je reálna, ale niektoré parametre sú domyslené).

Predstavte si, že tento rok počas leta, konkrétne 8. augusta 21:55 UT ste boli vo vedení multiodborovej komisie ktorá sleduje novy a jedna taká sa práve odohrala. Konkrétne rekurentná nova RS Ophiuchi v súhvezdí Hadonosa. Okamžite ste začali zbierať všetky dáta ktoré dokážete. Konkrétne ste sa dostali ku dátam z fotometrov, sprektrografov a neutrínových detektorov. A tak je na vás aby ste o tejto nove zistili čo najviac čo len dokážete z dát ktoré obdržíte z pozorovaní.
Dáta z fotometrov vám podali informáciu o svetelnosti novy. Po uplynutí určitého času ste na veľkých detektoroch zaznamenali zopár neutrín a určili ich plošnú hustotu ako aj ich rýchlosť. Následne ste po nejakom čase namerali svetelné čiary na spektrografoch.

Odpozorovali ste novu RS Ophiuchi a namerali ste nasledujúce parametre.

Bolometrická magnitúda	$m = 0\,\mathrm{mag}$
Časový rozdiel medzi fotónmi a neutrínami	$\Delta t = 2{,}5\,\mathrm{min}$
Rýchlosť neutrín	$v_\nu = 0{,}999\,999\,999\ c$
Plošná hustota neutrín	$\sigma_\nu = 4{,}5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}$
Pomer intenzít pre 3 filtre (U, B, V)	$\frac{U}{V} = 1{,}790$
	$\frac{V}{B} = 1{,}8231$
Zmerané vlnové dĺžky čiary Hα	$\lambda_\rightarrow = 6654{,}679\,42\,\text{Å}$
	$\lambda_\leftarrow = 6470{,}921\,02\,\text{Å}$

Každá podúloha sa vzťahuje na jednu veličinu, ktorú viete vypočítať zo zadania a iných podúloh.

Konštanty a zákony:

Energia protón-protónového procesu	$E_\mathrm{pp} = 26{,}73\,\mathrm{MeV}$
Vlnová dĺžka Hα čiary	$\lambda_{\mathrm{H}\alpha} = 6562{,}8\,\text{Å}$
Vlnové dĺžky filtrov	$\lambda_\mathrm{U} = 364\,\mathrm{nm}$
	$\lambda_\mathrm{B} = 442\,\mathrm{nm}$
	$\lambda_\mathrm{V} = 540\,\mathrm{nm}$
Wienova aproximácia Planckovho zákona	$I(f,T) = \frac{2hf^3}{c^2} e^{-\frac{hf}{k_\mathrm{B} T}}$

(a) Zistite aká je vzdialenosť r Zem-nova. Ideálne v rozumných jednotkách ako je ly alebo pc.

(b) Aká je absolútna bolometrická magnitúda novy M.

(c) Počet neutrín N_ν, ktoré vznikli pri nove.

Predpokladajte, že pri nove funguje iba protón-protónový cyklus, a že pri Zemi, ani pri nove nie sú žiadne ďalšie zdroje neutrín. Rovnica protón-protónového cyklu je

$$4p^+ \ \rightarrow\ {}^4He\ +\ 2\nu_e\ +\ E_\mathrm{pp}\,.$$

Nova prebehla tak, že v jednom momente došlo ku vzniku všetkých neutrín, ktoré sme následne zachytili pri Zemi. Ale el.mag. žiarenie s energiou E^* sa následne uvoľňovalo postupne za čas τ. Zistite:

(d) Energiu výbuchu novy E^*.

(e) Dobu výbuchu novy τ.

Predpokladajte, že všetka uvoľnená energia zistená z neutrín sa vyžaruje za čas τ tak, aby bola absolútna magnitúda M.

(f) Povrchovú teplotu novy T. Typické teploty sú $T_\mathrm{tab} = 10^{11}\,\mathrm{K}$. Vami zistená hodnota bude značne odlišná. Rozdiel diskutujte.

(g) Hubblovu konštantu H_0. Prípadné rozdiely diskutujte.

(h) Rýchlosť odhodených obálok v_O.

Zmerali ste 2 vlnové dĺžky z obálky ktorá odlieta od novy.

(i) BONUS úloha. Vymyslite si ešte jednu zaujímavú veličinu, ktorú viete určiť z dáta ktoré máte k dispozícií, a ktoré ste už vypočítali. Túto veličinu vypočítajte.

Snažte sa vypočítať všetky podúlohy, niektoré na sebe nezávisia, takže sa nemusia riešiť v zadanom poradí (i keď zadané poradie je odporúčané). Body sú udeľované najmä za postup. Úlohy by sa mali dať vypočítať bez extrémnych aproximácií. Skúste sa vyhnúť zaokrúhľovacím chybám. Výsledok ale uveďte na rozumný počet platných cifier.

8.4.11 AO 2022, úloha 3 – Vesmírny slnečník

Píše sa rok 2122. Ľudstvo pod tlakom globálneho otepľovania vypustí vesmírnu loď s obrovským slnečníkom do priestoru medzi Zemou a Slnkom za cieľom znížiť množstvo dopadajúceho žiarenia, a teda ochladenia celého sveta. Teleso má byť umiestnené do tzv. libračného bodu L1. L1 je bod, kde môže teleso obiehať okolo Slnka s obežnou periódou rovnou perióde Zeme, bez toho aby zrýchľovalo smerom k Zemi alebo k Slnku. Bod L1 sa nachádza $x = 1{,}5 \cdot 10^6$ km od Zeme smerom k Slnku, na čiare ktorá ich spája. Najskôr preskúmajme astrodynamické stránky problému:

(a) Vypočítajte, ako ďaleko od Zeme pozdĺž úsečky Slnko-Zem sa nachádza bod v ktorom sa presne vyrušia gravitačné sily Zeme a Slnka (x_0). Očakávate že bod L1 (x) bude bližšie ($x_0 > x$) alebo ďalej ($x_0 < x$) od Zeme ako tento bod a prečo?

(b) Aký praktický (gravitačný) problém je spojený s bodom L1? Zostane vesmírna loď v okolí tohto bodu sama od seba v jeho okolí? Vyžaduje sa intuitívne vysvetlenie opierajúc sa o základné sily, žiadne výpočty. Tlak žiarenia nateraz zanedbajte.

Teraz sa pozrime na žiarenie:

(c) Na základe žiarivého výkonu Slnka a vzdialenosti Zem-Slnko vypočítajte hodnotu slnečnej konštanty F_S, teda množstva žiarivej energie prechádzajúcej kolmo nastaveným povrchom 1 m^2 za 1 s vo vzdialenosti Zeme od Slnka.

(d) Ambíciou je zatieniť 1% slnečného žiarenia dopadajúceho na Zem. Približne aký rozľahlý tieniaci povrch v bode L1 je na to potrebný?

(e) Zanedbajme problém s gravitáciou z podúlohy (b) a sústreďme sa na tlak žiarenia. Akou silou musí pôsobiť kompenzačný motor vesmírnej lode na kompenzáciu neustále dopadajúcej hybnosti zo slnečných fotónov? Ak ste nevypočítali veľkosť tieniaceho povrchu v (d), uveďte túto silu vztiahnutú na jeden meter štvorcový tieniaceho povrchu. Ak ste nevypočítali slnečnú konštantu v (c), počítajte s hodnotou $F_\text{S} = 1400\,\text{W}\,\text{m}^{-2}$. Pomôcka: môže sa vám hodiť vzťah $E = pc$, kde E je energia fotónu, p jeho hybnosť, c rýchlosť svetla vo vákuu.

V nasledujúcej časti sa pozrieme na to, čo spraví uvedené 1 % redukcie slnečnej konštanty s teplotu Zeme. Pre tieto účely zanedbajme atmosféru Zeme a akýkoľvek skleníkový efekt. Uvažujte, že celá Zem má jednu a tú istú teplotu, žiari ako absolútne čierne teleso v infračervenej oblasti, a voči dopadajúcemu slnečnému žiareniu vykazuje albedo $A = 0{,}3$ (tzn. odrazivosť, pomer odrazeného a dopadajúceho žiarenia).

(f) Vypočítajte teplotu Zeme za takýchto podmienok pri obvyklej slnečnej konštante. O koľko sa zmení pri jej zmenšení o 1 %?

BONUS

(g) Uvažujte atmosféru so skleníkovými plynmi. Modelujme ich ako jedinú tenkú vrstvu niekde nad povrchom, ktorá pohltí všetko tepelné žiarenie prichádzajúce zdola zo Zeme a vyžaruje ako čierne teleso rovnomerne do oboch smerov (hore a dole). Táto atmosféra nijako neovplyvní albedo Zeme. Odvoďte rovnicu a hodnotu pre rovnovážnu teplotu Zeme v tomto jednoduchom (1D) skleníkovom modeli. Odvoďte tiež všeobecnú rovnicu pre malé zmeny tejto teploty v dôsledku malých zmien slnečnej konštanty.

8.4.12 AO 2023, úloha 2 – JWST

Ďalekohľad Jamesa Webba je najväčší vesmírny teleskop. Má hmotnosť $m = 6160\,\mathrm{kg}$ a zrkadlo s priemerom $D = 6{,}5\,\mathrm{m}$. Špecializuje sa na pozorovanie v infračervenej oblasti spektra na vlnových dĺžkach od $\lambda_{\mathrm{min}} = 600\,\mathrm{nm}$ do $\lambda_{\mathrm{max}} = 28\,300\,\mathrm{nm}$. Bol vypustený koncom roku 2021 a po mesiaci sa usadil na dráhu, ktorá sa pohybuje v blízkosti Lagrangeovho bodu L2. To znamená, že si voči Zemi zachováva relatívnu polohu.

Uvažujte, že Zem obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe. Relatívna poloha bodu L2 voči Zemi je v perihéliu $d_{\mathrm{P}} = 1{,}48 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ a v aféliu $d_{\mathrm{A}} = 1{,}53 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ (pričom leží na priamke Slnko – Zem smerom od Slnka). Okolo Zeme obieha Mesiac po eliptickej dráhe, ktorá je sklopená voči ekliptike.

(a) Do akej vzdialenosti od Zeme siaha úplný tieň Zeme v perihéliu a aféliu? Môže JWST pozorovať úplne zatmenie Slnka (za predpokladu, že sa nachádza presne v L2)?

(b) JWST využíva solárnu energiu, preto by vadilo ak by vstúpil aj do polotieňa Zeme. Aká je pološírka polotieňu Zeme v bode L2? Inými slovami: ako ďaleko od priamky Slnko – Zem – L2 (v bode L2) siaha polotieň Zeme? Vypočítajte pre Zem v perihéliu aj aféliu.
Hint: JWST je v polotieni Zeme ak z jeho pohľadu pozoruje čiastočné zatmenie Slnka Zemou.

(c) V akej najmenšej vzdialenosti od bodu L2 (v smere kolmo na priamku Slnko – Zem – L2) musí JWST obiehať, aby sa vyhol aj polotieňu Mesiaca?
Hint: počítajte prípad pre Zem v perihéliu.

(d) Koľkokrát viacej fotónov zachytí za sekundu JWST oproti ľudskému oku pri pozorovaní vzdialeného bodového objektu vyžarujúceho monochromaticky na λ_{min}? Priemer ľudského oka (pupily) je $D_{\mathrm{oko}} = 4\,\mathrm{mm}$ a kvantová účinnosť (pre λ_{min}) je $\eta_{\mathrm{oko}} = 0{,}1$. Extinkcia atmosféry (pre daný objekt) je 0,3 mag. Kvantová účinnosť JWST (pre λ_{min}) je $\eta = 0{,}7$.

(e) Aká je najmenšia vzdialenosť dvoch bodov na Mesiaci, ktoré vie JWST (niekedy) rozlíšiť? Predpokladajte, že sa nachádza presne v L2.

Kapitola 9

Dátová analýza

9.1 AO 2018, Oumuamua

1I/2017 U1 'Oumuamua je prvý známy medzihviezdny objekt, ktorý prelieta slnečnú sústavu. Objavil ho 19. 10. 2017 Robert Weryk pomocou ďalekohľadu Pan-STARRS na Havaji. V čase objavu sa nachádzal už za perihéliom vo vzdialenosti 0,22 AU od Zeme. Jedná sa o malé teleso s rozmermi približne 230 m × 35 m tmavočervenej farby, podobnej ako mnoho objektov v periférnych častiach Slnečnej sústavy. Na pozemskej oblohe sa najjasnejšie javilo ako hviezda 19-tej magnitúdy. Vzhľadom na neprítomnosť kometárnej aktivity a rýchlu rotáciu je pravdepodobne zložené z materiálu s vysokou hustotou. Vašou úlohou je určiť parametre dráhy tohto objektu pomocou priemetu jeho trajektórie na pozemskú oblohu, znázorneného na obrázkoch.

Pomôcky: polystyrénová guľa s polomerom $r = 4\,\mathrm{cm}$, prípravok na rysovanie a meranie uhlov na povrchu gule, pravítko, fixka.

Úlohy:

(a) Odhadnite dátum prechodu perihéliom $T_\odot$ a dátum najväčšieho priblíženia k Zemi $T_\oplus$.

(b) Určte rovníkové súradnice smeru A, z ktorého do Slnečnej sústavy **1I** priletel, a smeru B, kam odlieta.

(c) Na polystyrénovú guľu vyneste trajektóriu **1I** po nebeskej sfére v pohľade zo Slnka, vrátane určenia smeru pohybu.

(d) Na guli vyznačte nasledujúce veličiny a určte (odmerajte) ich hodnoty:

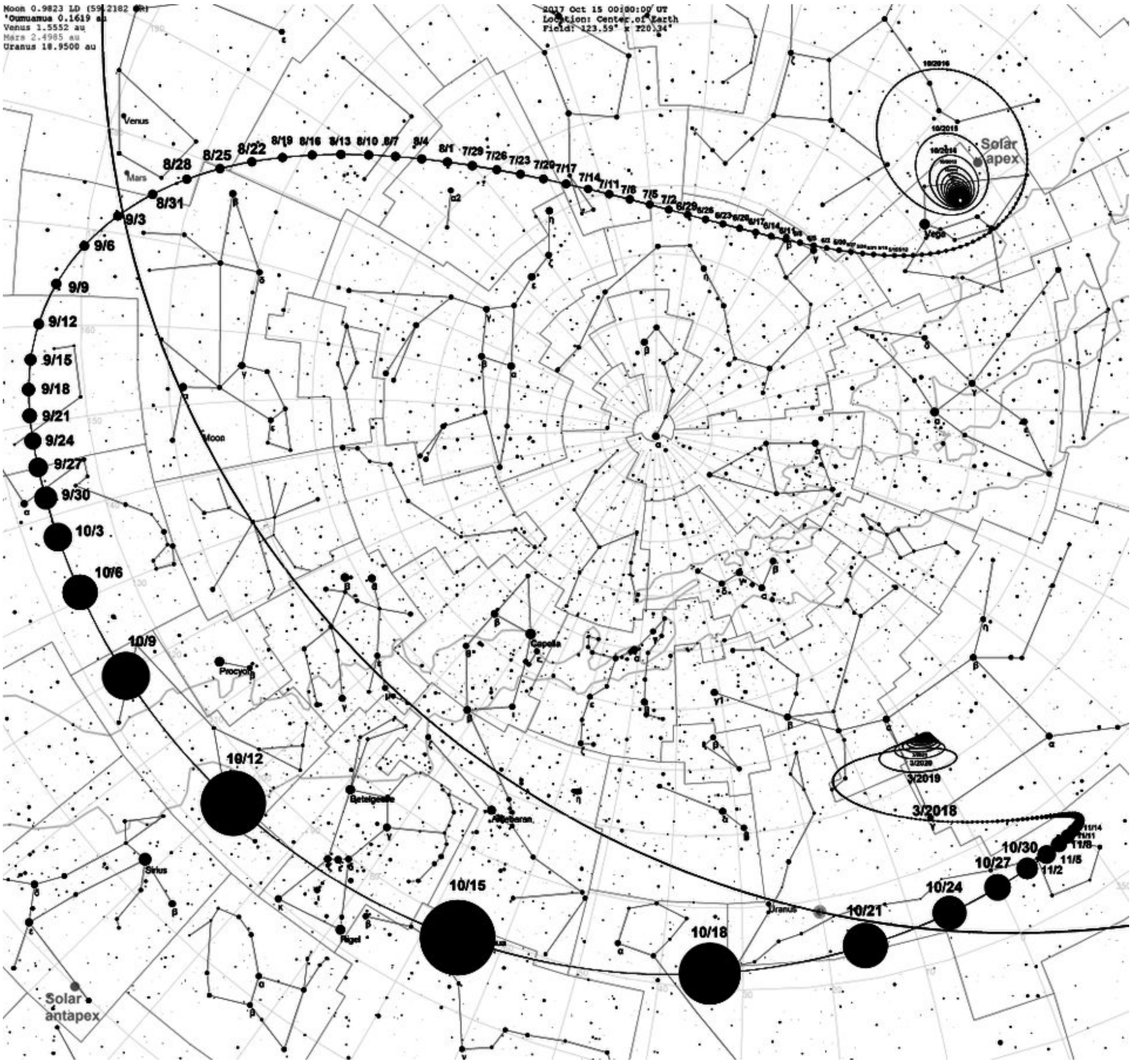
- uhlovú vzdialenosť ϕ medzi bodmi A, B,
- sklon roviny dráhy k rovine ekliptiky i,
- dĺžku výstupného uzla Ω,
- argument perihélia ω.

(e) Z hodnoty ϕ určte excentricitu dráhy e. Ak ste nezískali hodnotu ϕ vyššie, použite $\phi = 70°$.

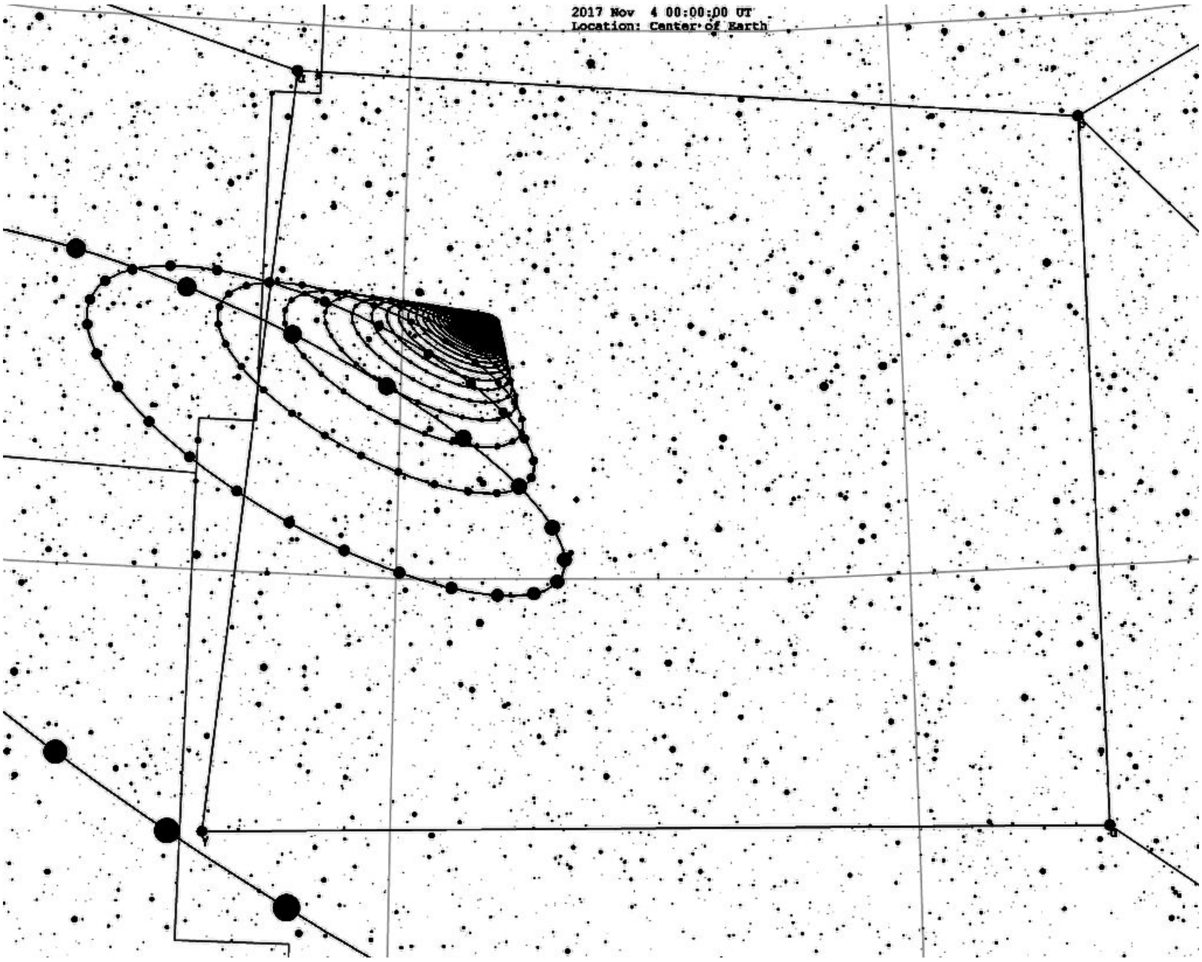
(f) Odhadnite rýchlosť v_∞, ktorou sa bude **1I** pohybovať voči Slnku po opustení slnečnej sústavy.

(g) Z hodnoty v_∞ určte veľkosť hlavnej polosi a, ak ste hodnotu nezískali, použite $v_\infty = 25\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

(h) Vypočítajte vzdialenosť od Slnka v perihéliu q a rýchlosť v perihéliu v_q.



Obr. 9.1: Trajektória **1I** po pozemskej oblohe.



Obr. 9.2: Detail trajektórie **1I** po pozemskej oblohe.

9.2 AO 2019, CM diagram

V tejto úlohe z dátovej analýzy zameriame na meranie vzdialeností pomocou metódy tzv. *Colour-magnitude diagram* (CM diagram). Jedná sa o závislosť zdanlivej jasnosti hviezd ležiacich v jednej hviezdokope na ich farebnom indexe (rozdiele jasností na dvoch vlnových dĺžkach). Keďže zdanlivá jasnosť hviezdy závisí na jej žiarivom výkone a farebný index na teplote, nie je prekvapením, že grafické znázornenie saponáša na *Hertzsprung-Russelov diagram*. Preto porovnaním CM diagramu zostrojeného pre napr. guľovú hviezdokopu s iným štandardizovaným diagramom vieme určiť vzdialenosť tejto hviezdokopy. Následne sa zo vzdialeností guľových hviezdokôp štatistickými metódami pokúsime určiť vzdialenosť centra Galaxie od Slnka.

Zdanlivé jasnosti hviezd vo viditeľnom a v modrom svetle sú označené zaradom V a B.

(a) Pomocou priložených CM diagramov určte modul vzdialenosti $(m - M)$ a farebný exces

$$E_{\mathrm{B-V}} = (B - V) - (B - V)_0 \,, \tag{9.1}$$

pre guľové hviezdokopy NGC 5053, NGC 6366 a Palomar 3. Využite pri tom diagram hviezdokopy M3, ktorej vzdialenosť od Zeme je $r_0 = 10\,\mathrm{kpc}$. Predpokladajte, že pre hviezdokopu M3 je absorpcia v medzihviezdnom prostredí zanedbateľná, teda pre M3 platí $(m_0 - M_0) = 15$ mag. Nezabudnite určiť chybu veličín.

(b) Z modulov vzdialenosti $(M - m)$ a farebných excesov $E_{\mathrm{B-V}}$ určte skutočné vzdialenosti r k týmto trom guľovým hviezdokopám. Predpokladajte, že pre medzihviezdnu extinkciu A_{V} vo filtri V platí

$$R_{\mathrm{V}} = \frac{A_{\mathrm{V}}}{E_{\mathrm{B-V}}} = 3{,}1 \,. \tag{9.2}$$

Pokúste sa odhadnúť, akou veľkou chybou je výsledná vzdialenosť r zaťažená.

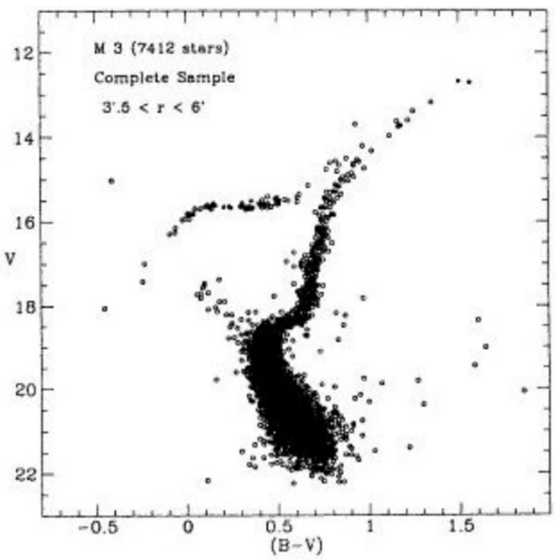
(c) V tabuľke sa nachádzajú údaje o polohe na oblohe v galaktických súradniciach (l,b) a vzdialenosti od Zeme r pre náhodne vybrané guľové hviezdokopy ležiace v Galaxii. Galaktická dĺžka je označená l, galaktická šírka je b. Znázornite graficky rozmiestnenie priemetov polôh hviezdokôp do galaktickej roviny na milimetrový papier s polárnymi súradnicami.

(d) Určte polohu stredu Galaxie a jeho chybu v grafe a popíšte postup, ktorý ste použili. Určte vzdialenosť k stredu Galaxie R aj s chybou.

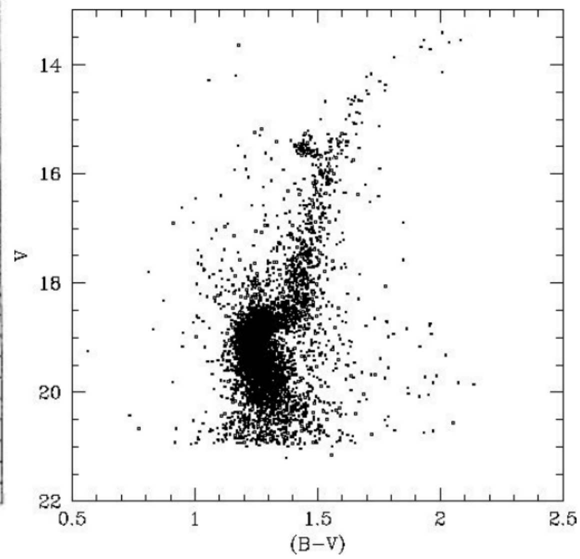
(e) Diskutujte výsledok, najmä prítomnosť chýb, ako štatistických, tak systematických a porovnajte ho so skutočnou hodnotou $R = (8{,}0 \pm 0{,}3)\,\mathrm{kpc}$.

Tabuľka 9.1: Vzdialenosti a galaktické súradnice vybraných hviezdokôp.

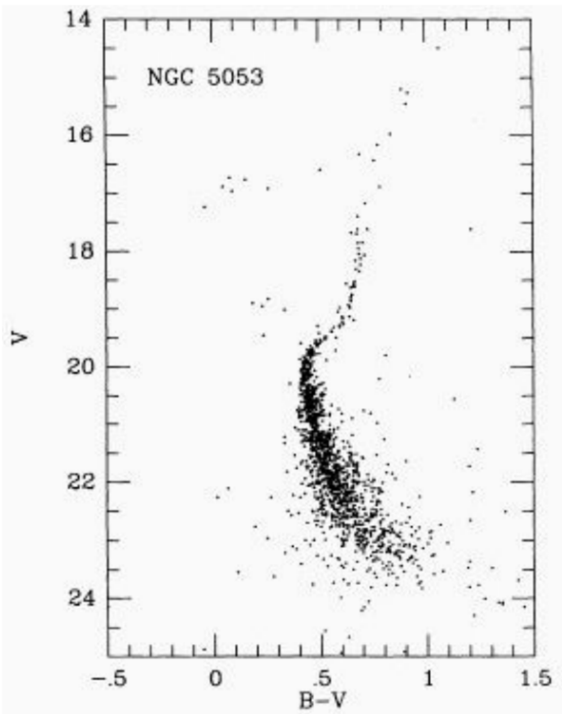
ID	Kat. označenie	l [◦]	b [◦]	r [kpc]
A	NGC 1261	270,54	-52,12	16,3
B	NGC 2298	245,63	-16,00	10,8
C	Pal 3	240,15	41,86	—
D	NGC 4372	300,99	-9,88	5,8
E	NGC 5053	335,70	78,95	—
F	M 3	42,22	78,71	10,2
G	NGC 5824	332,56	22,07	32,1
H	Lynga 7	328,77	-2,80	8,0
I	M 107	3,37	23,01	6,4
J	M 54	5,61	-14,09	26,5
K	NGC 6316	357,18	5,76	10,4
L	IC 1257	16,54	15,15	25,0
M	NGC 6366	18,41	16,04	—
N	Terzan 1	357,57	1,00	6,7
O	Djorg 1	356,69	-2,47	13,7
P	Terzan 9	3,61	-1,99	7,1
Q	NGC 6540	3,29	-3,31	5,3
R	IC 1276	21,83	5,67	5,4
S	NGC 6638	7,90	-7,15	9,4
T	NGC 6712	25,35	-4,32	6,9
U	NGC 6749	36,20	-2,21	7,9
V	Terzan 7	3,39	-20,07	22,8
W	NGC 6934	52,10	-18,89	15,6
Y	NGC 7492	53,39	-63,48	26,3



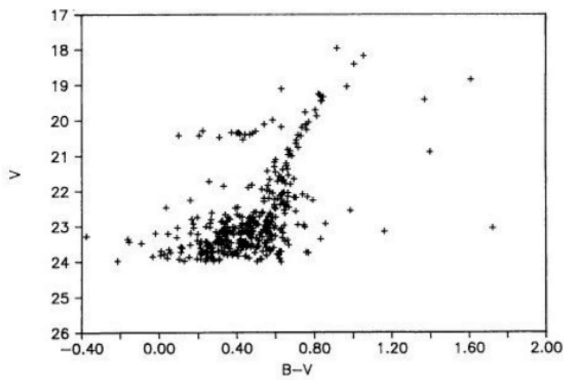
Obrázok 1: CM diagram pre M3 $r_0 = 10\,\mathrm{kpc}$



Obrázok 2: CM diagram pre NGC 6366



Obrázok 3: CM diagram pre NGC 5053



Obrázok 4: CM diagram pre Palomar 3

Buonanno, R.; Corsi, C. E.; Buzzoni, A.; Cacciari, C.; Ferraro, F. R.; Fusi Pecci, F.: The stellar population of the globular cluster M 3., AA 290, 69-103

Ortolani, S.; Gratton, R. G.: Spectroscopy and deep photometry of PAL 3 and C0422-213, AA Sup., 79 2, 155

Alonso, A.; Salaris, M.; Martinez-Roger, C.; Straniero, O.; Arribas, S.: CCD photometry of the metal-rich halo cluster NGC 6366, AA 323, 374-381

Fahlman, Gregory G.; Richer, Harvey B.; Nemec, James: The stellar content and structure of the globular cluster NGC 5053, AJ 380, 124-139

Obr. 9.3: CM diagramy.

9.3 AO 2020, Bolid

Poznámka: v roku 2020 sa celoštátne finále Astronomickej olympiády konalo online. Táto úloha preto predpokladala, že súťažiaci pri jej riešení využijú ľubovoľné zdroje.

Dňa 22. 9. 2020 o 22:10 LSEČ štyria pozorovatelia A, B, C, D na území Slovenska pozorovali hypotetický jasný bolid. Ich polohy sú zanesené v „mape“ na obrázku 9.4, počiatku odpovedajú súradnice $\varphi = 48{,}4°$, $\lambda = 19{,}7°$, pri všetkých výpočtoch zakrivenie Zeme medzi pozorovateľmi zanedbajte. V tabuľke 9.2 sú zaznamenané pozorované polohy začiatku (z) a konca (k) svetelnej dráhy bolidu v rovníkových (δ, α) súradniciach, ktoré boli určené z fotografií (A, B), videa (C), resp. vizuálneho pozorovania (D). Pozorovateľ B pozoroval spektroskopicky, zaznamenal teda navyše aj spektrum úkazu znázornené na obrázku 9.6. V tabuľke 9.3 sú uvedené vlnové dĺžky obvyklých čiar v spektrách bolidov.

(a) Preveďte súradnice pozorovaných začiatkov a koncov stopy bolidu do horizontálnych súradníc, na prevody môžete použiť softvér (kalkulátor transformácií súradníc, virtuálne planetárium, ...)

(b) Do milimetrového papiera zaneste polohy pozorovateľov a zostrojte priemety miest začiatku a konca úkazu na zemský povrch a priemet trajektórie telesa.

(c) Určte výšky telesa nad povrchom na začiatku H_z a konci H_k úkazu.

(d) Na milimetrovom papieri zaznačte odhadované miesto dopadu. Výber miesta dopadu okomentujte.

(e) Určte azimut a výšku nad obzorom pre smer, z ktorého teleso priletelo. V akom je to súhvezdí?

(f) Odhadnite rýchlosť telesa v voči Zemi pri vstupe do atmosféry, na videozázname pozorovateľa C sa bolid na začiatku trajektórie pohybuje rýchlosťou 2,55 °/s.

(g) Na základe smeru a rýchlosti telesa odhadnite excentricitu e, veľkú polos a a inklináciu i jeho orbity okolo Slnka. Vplyv gravitačného poľa Zeme a Mesiaca zanedbajte. Vyberte jeden z intervalov:

e	0-0,1	0,1-0,3	0,3-0,7	0,7-1,0	>1
a	<0,8 au	0,8 au-1,2 au	1,2 au-2,0 au	2 au-5 au	>5 au
i	0°-10°	10°-20°	20°-50°	>50°	

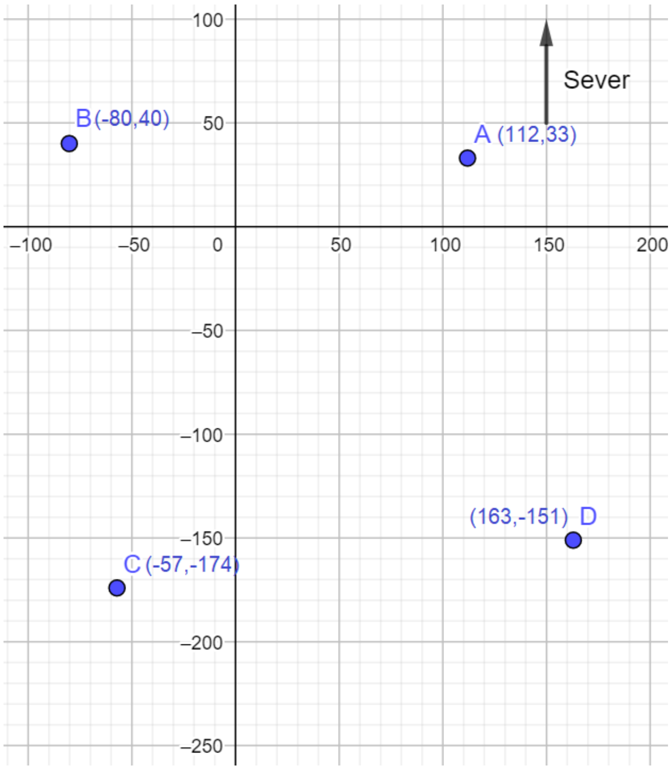
Takisto odhadnite dĺžku výstupného uzla orbity telesa Ω.

(h) V spektre na obrázku 9.6 identifikujte aspoň 10 spektrálnych čiar, zaznačte ich do grafu. Ktoré prvky ich spôsobujú?

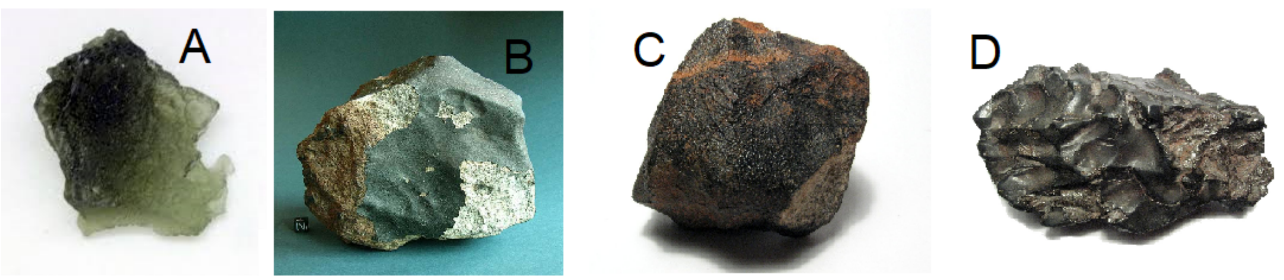
(i) O aký typ prípadného meteoritu sa jedná? Typu priraďte jeden z obrázkov 9.5.

Tabuľka 9.2: Pozorované polohy začiatku a konca svetelnej dráhy bolidu.

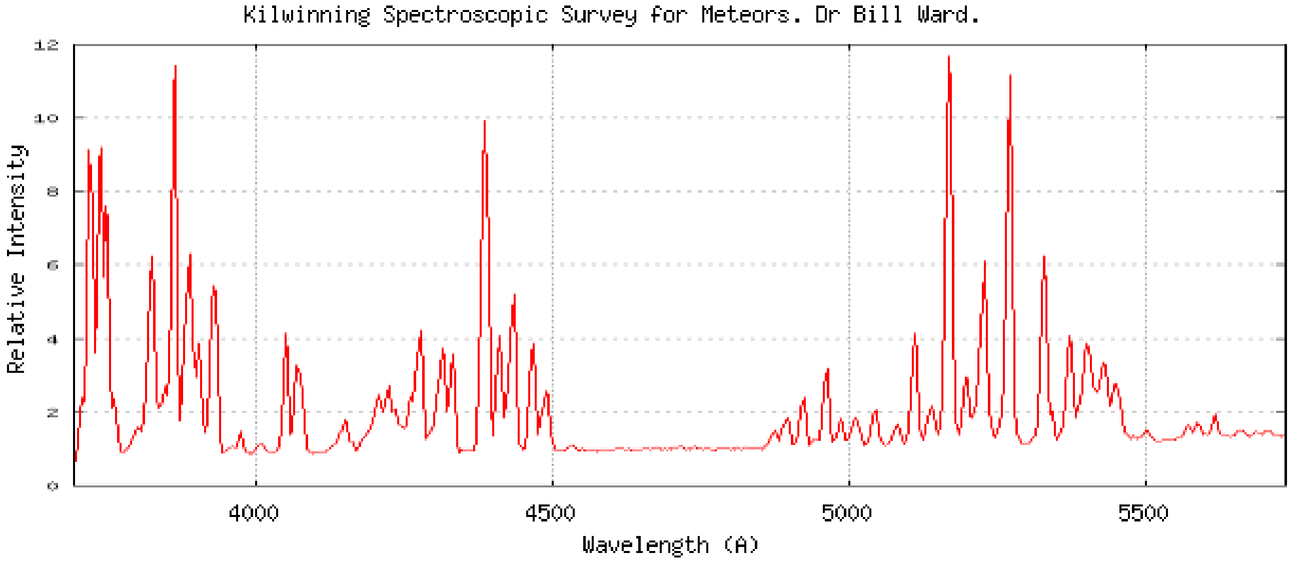
	δ	α
A_z	$-16{,}6°$	$22^h\,46^m$
A_k	$-3{,}2°$	$17^h\,6^m$
B_z	$-14{,}8°$	27^m
B_k	$-5{,}5°$	$2^h\,3^m$
C_z	$12{,}3°$	$2^h\,9^m$
C_k	$43{,}4°$	$7^h\,26^m$
D_z	$19{,}6°$	$22^h\,29^m$
D_k	$33{,}4°$	$13^h\,19^m$



Obr. 9.4: Mapa s polohami pozorovateľov, jednotky osí sú kilometre.



Obr. 9.5: Ktorý z týchto obrázkov zodpovedá meteoritu z úlohy?



Obr. 9.6: Spektrum získané pozorovateľom B.

Tabuľka 9.3: Zoznam spektrálnych čiar častých v spektrách meteorov a ich relatívne intenzity. Čiary označené hviezdičkou sa vyskytujú najmä v spektrách rýchlych meteorov.

λ [Å]	Atóm	int	λ [Å]	Atóm	int	λ [Å]	Atóm	int
3719,9	Fe	10	4254,4	Cr	9	5227,2	Fe	5
3734,9	Fe	8	4271,8	Fe	10	5269,5	Fe	14
3737,1	Fe	9	4274,8	Cr	8	5328,0	Fe	12
3745,6	Fe	8	4289,7	Cr	7	5371,5	Fe	9
3749,5	Fe	8	4307,9	Fe	10	5397,1	Fe	5
3820,4	Fe	9	4325,8	Fe	10	5405,8	Fe	6
3825,9	Fe	8	4383,5	Fe	14	5429,7	Fe	6
3829,4	Mg	10	4404,8	Fe	11	5434,5	Fe	4
3832,3	Mg	11	4481,2	Mg+	15*	5446,9	Fe	4
3838,3	Mg	12	4920,5	Fe	3	5455,6	Fe	4
3859,9	Fe	11	4923,9	Fe+	2*	5528,4	Mg	2
3886,3	Fe	9	4957,6	Fe	4	5615,7	Fe	1
3933,7	Ca+	40*	5012,1	Fe	1	5890,0	Na	40
3968,5	Ca+	35*	5018,4	Fe+	3*	5895,9	Na	35
4030,8	Mn	10	5110,4	Fe	1	6156,8	O	1*
4045,8	Fe	10	5167.3	Mg	17	6162,2	Ca	1
4063,6	Fe	9	5172,7	Mg	25	6347,1	Si+	6*
4131,0	Si+	1*	5183,6	Mg	28	6371,4	Si+	3*
4226,7	Ca	11	5208,4	Cr	10	6495,0	Fe	1

9.4 AO 2021, Spektrum hmloviny

Na obrázku 9.7 je zobrazené spektrum hmloviny. Fialovou je zobrazené emisné spektrum a žltou sú vynesené niektoré časti spektra zväčšene po vynásobení nameraných intenzít 20-timi. Z intenzít jednotlivých čiar sa pokúsite určiť povahu tohto objektu a fyzikálne vlastnosti plynu, ktorého žiarenie pozorujeme.

(a) Zo spektra určte intenzity nasledovných spektrálnych čiar: Hα 6563 Å ; Hβ 4861 Å ; [N II] 6584 Å ; [O III] 4363 Å, 4959 Å, 5007 Å ; [S II] 6716 Å, 6731 Å.
Nezabudnite odčítať žiarenie kontinua.

(b) Vypočítajte hodnoty logaritmov pomerov intenzít čiar $\log \frac{\text{[O III] 5007}}{H\beta}, \log \frac{\text{[N II] 6584}}{H\alpha}$ a pomocou BPT diagramu (Baldwin, Phillips a Terlevich) na obrázku 9.8 určte, či sa jedná o planetárnu hmlovinu (PNe), alebo oblasť ionizovaného vodíka (HII).

(c) Z pomeru intenzít čiar [S II] zistite elektrónovú hustotu n_e v plyne pomocou diagramu 9.9. Odhadnite ďalej hustotu plynu ρ za predpokladu, že plyn aproximujeme ako úplne ionizovaný oblak vodíka.

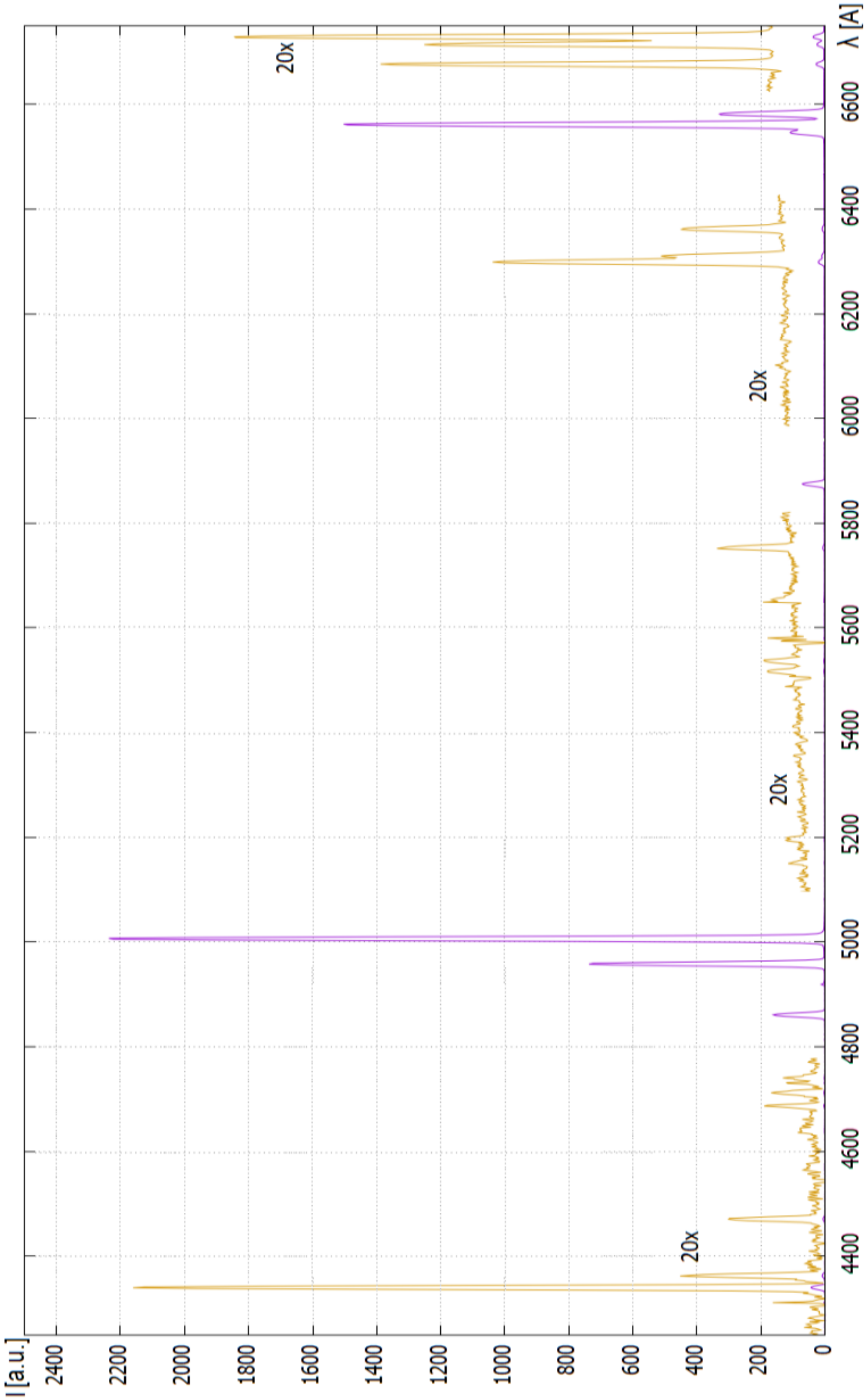
(d) Teplotu plynu T je možné určiť z intenzít čiar kyslíka [O III] pomocou vzťahu

$$\frac{I_{4959} + I_{5007}}{I_{4363}} = \frac{7{,}90 \exp\left(3{,}29 \cdot 10^4/T\right)}{1 + 4{,}5 \cdot 10^{-4}\, n_\mathrm{e}/\sqrt{T}}\,, \tag{9.3}$$

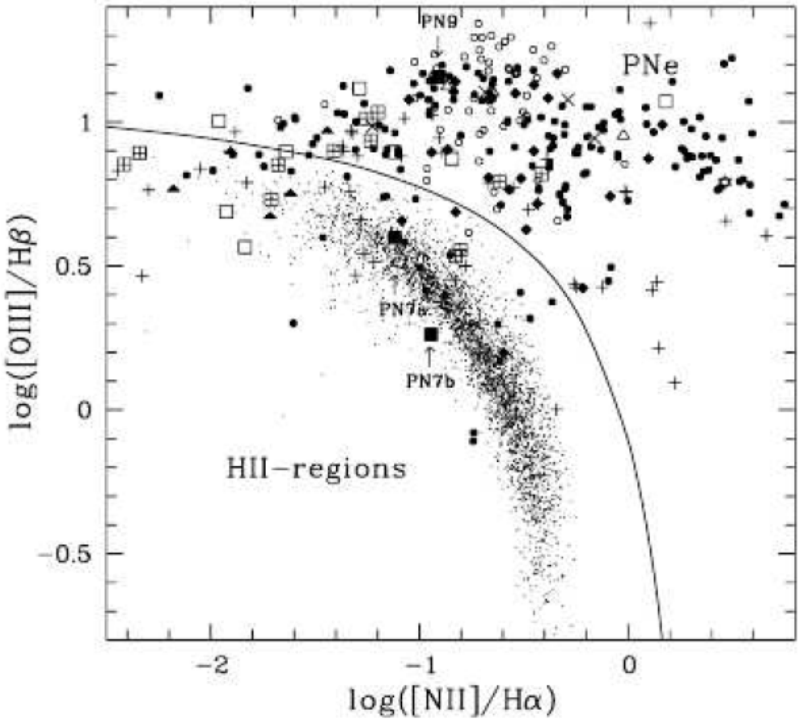
kde teplotu meriame v kelvinoch a elektrónovú hustotu v cm^{-3}. Pri výpočte sa zamyslite nad veľkosťou druhého člena v menovateli zlomku.

(e) Prečo sa pri analýze používajú pomery čiar s blízkymi vlnovými dĺžkami? Popíšte jav, ktorý komplikuje určenie vlastností objektu z pozorovaných intenzít vo vzdialených oblastiach spektra.

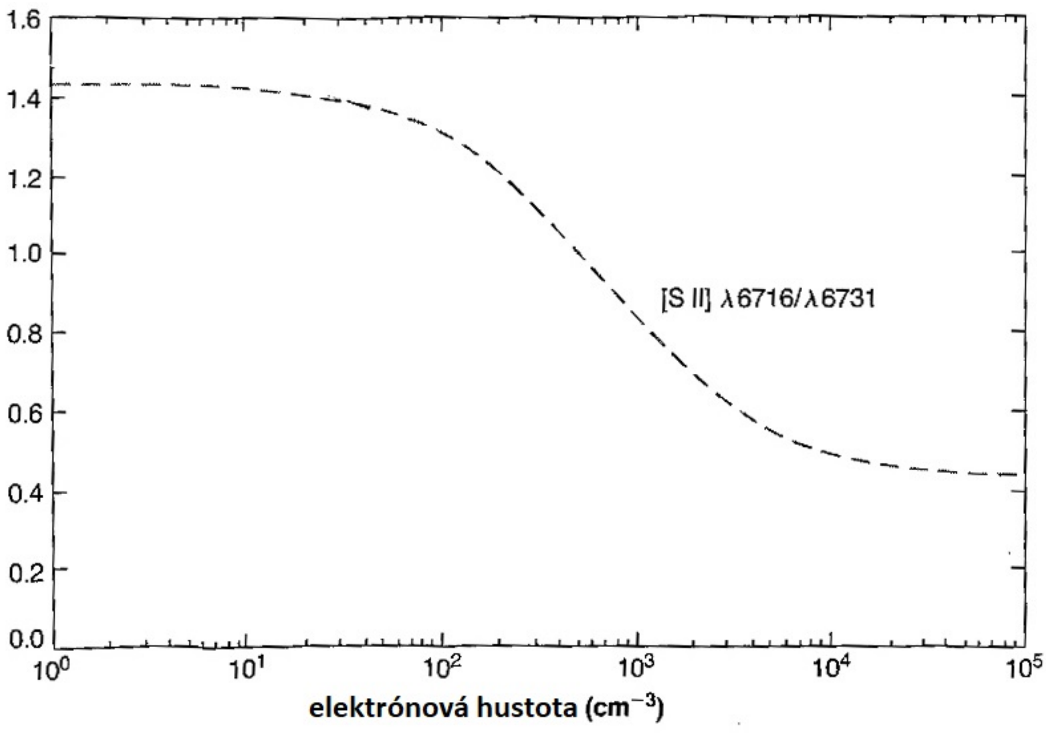
(f) Vodík je vo vesmíre najviac zastúpený prvok. Prečo teda spektru hmloviny nedominujú spektrálne čiary (Balmerovej série) vodíka?



Obr. 9.7: Spektrum hmloviny.



Obr. 9.8: BPT diagram. Oblasti HII sa nachádzajú vľavo dole a planetárne hmloviny vpravo hore.



Obr. 9.9: Diagram pre určenie elektrónovej hustoty z pomeru intenzít čiar síry.

9.5 AO 2022, Stelárna astronómia

Jednou zo základných oblastí astrofyziky je výskum hviezd - stelárna astronómia. Na oblohe sa však hviezdy okrem Slnka javia ako bodové zdroje v neznámej vzdialenosti. Určenie hmotností, polomerov, či povrchových teplôt hviezd teda nie je ľahká úloha. Významným je preto pozorovanie dvojhviezd, ktoré nám umožňuje tieto parametre určiť a následne vytvoriť tabuľky pomocou ktorých môžeme odhadovať parametre iných hviezd.

V tejto úlohe sa budeme venovať fotometrickému pozorovaniu modelovej zákrytovej dvojhviezdy s obežnou periódou $P = 10\,\mathrm{d}$. Počas riešenia predpokladajte sklon dráhy dvojhviezdy $i = 90°$, teda že sa na sústavu pozeráme z miesta v jej obežnej rovine. Zanedbajte okrajové stemnenie disku hviezd, teda predpokladajte, že hviezdne disky majú konštantnú plošnú jasnosť.

Záznam nameraných relatívnych svetelných tokov F_V vo fotometrickom kanále V ($\lambda_\mathrm{V} \approx 550\,\mathrm{nm}$) v okolí primárneho a sekundárneho minima v závislosti na čase danom v dňoch sa nachádza v tabuľke 9.4.

(a) Vyneste graficky závislosť svetelného toku na čase. Povšimnite si, že v čase majú merania konštantný krok 0,012 dní, ktorému môžete vhodne prispôsobiť mierku grafu. Z grafu odčítajte:

- T_1, T_2 časy stredu primárneho resp. sekundárneho minima,
- Δt_1, Δt_2 doby trvania primárneho resp. sekundárneho zákrytu (medzi prvým a štvrtým kontaktom),
- δt_1, δt_2 doby trvania úplnej fázy primárneho resp. sekundárneho zákrytu,
- I_1, I_2 relatívny svetelný tok v primárnom resp. sekundárnom minime.

(b) Z hĺbok zákrytov určte pomer polomerov zložiek $R_2/R_1 < 1$ a ich povrchových jasností F_2/F_1.

(c) Je určená hodnota pomeru polomerov zložiek konzistentná s dobami úplného a čiastočného zákrytu primárneho minima?

(d) Určte excentricitu e a argument periastra ω orbity sústavy pomocou vzťahov

$$e\cos\omega = \sqrt{1-e^2}\tan\left[(\Delta\Phi - 0{,}5)\cdot 90°\right], \tag{9.4}$$

$$e\sin\omega = \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_2 + \Delta t_1}, \tag{9.5}$$

kde $\Delta\Phi$ je rozdiel fázy medzi sekundárnym a primárnym minimom (číslo medzi 0 a 1, pre kruhovú dráhu $\Delta\Phi = 0{,}5$).

(e) Ak budeme predpokladať, že hviezdy vyžarujú ako absolútne čierne telesá môžeme pre pomer povrchových jasností pre danú vlnovú dĺžku λ pozorovania písať

$$\frac{F_2^\lambda}{F_1^\lambda} = \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_1}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_2}\right) - 1} = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\exp\left(\frac{1}{xy}\right) - 1} = f(x,y)\,, \tag{9.6}$$

kde

$$x = \frac{\lambda k_B T_1}{hc} \quad \text{a} \quad y = \frac{T_2}{T_1}\,. \tag{9.7}$$

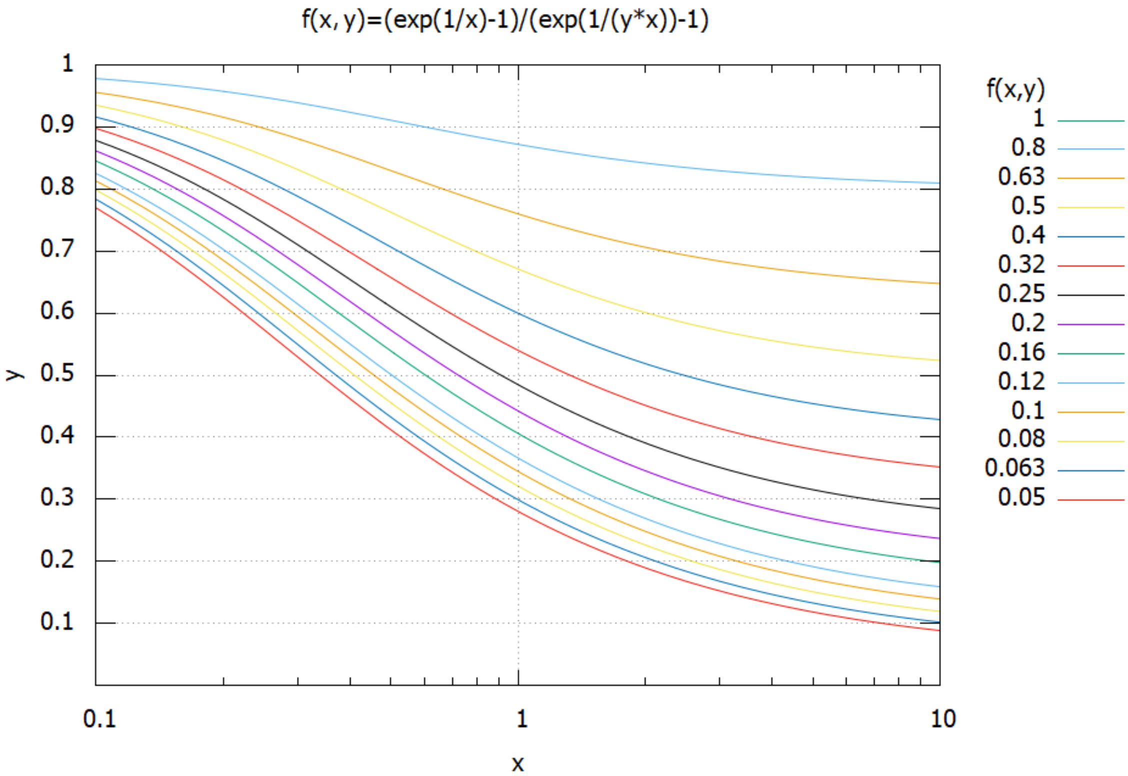
Túto závislosť môžeme vidieť na obrázku 9.10. Pomer povrchových jasností určený z pozorovaní v strednej infračervenej oblasti $\lambda_M \approx 4750\,\mathrm{nm}$ bol určený ako $F_2^M/F_1^M \doteq 0.464$. Určte teploty T_1, T_2 zložiek dvojhviezdy graficky.

(f) Diskutujte ako by situáciu ovplyvnila iná hodnota sklonu dráhy.

(g) Aký ďalší typ pozorovania potrebujeme pre určenie hmotností a skutočných polomerov hviezd?

Tabuľka 9.4: Pozorované relatívne svetelné toky dvojhviezdy vo fotometrickom kanále V.

čas (d)	F_V	čas (d)	F_V	čas (d)	F_V	čas (d)	F_V
2,441	0,999	2,670	0,868	18,219	0,999	18,447	0,992
2,453	0,999	2,682	0,866	18,231	0,999	18,459	0,990
2,465	1,000	2,694	0,869	18,243	1,001	18,471	0,991
2,477	1,000	2,706	0,870	18,255	1,000	18,483	0,991
2,489	0,998	2,718	0,882	18,267	0,999	18,496	0,990
2,502	0,987	2,730	0,905	18,279	0,999	18,508	0,990
2,514	0,968	2,742	0,930	18,291	0,997	18,520	0,989
2,526	0,946	2,754	0,956	18,303	0,994	18,532	0,990
2,538	0,924	2,766	0,976	18,315	0,994	18,544	0,991
2,550	0,898	2,778	0,992	18,327	0,994	18,556	0,994
2,562	0,877	2,790	1,001	18,339	0,988	18,568	0,990
2,574	0,869	2,802	1,000	18,351	0,988	18,580	0,995
2,586	0,866	2,814	1,000	18,363	0,992	18,592	0,997
2,598	0,868	2,826	0,998	18,375	0,989	18,604	0,996
2,610	0,867	2,838	0,999	18,387	0,991	18,616	0,998
2,622	0,868	2,850	1,002	18,399	0,989	18,628	0,998
2,634	0,868			18,411	0,989	18,640	1,001
2,646	0,866			18,423	0,989	18,652	1,000
2,658	0,866			18,435	0,990	18,664	1,000



Obr. 9.10: Graf potrebný na určenie povrchových teplôt zložiek, x-ová os je v logaritmickej mierke.

Kapitola 10

Praktické úlohy

10.1 Kategória ZŠ, domáce kolo

10.1.1 AO 2007, úloha 4

Obloha je rozdelená konvenciou na 88 súhvezdí. Sú rôzne rozsiahle a plne pokrývajú celú nebeskú klenbu. Predstavujeme si ich obvykle vo forme viac – menej výrazných obrazcov, ktoré pomenovala kultúrna história ľudstva. Praktickou pomôckou pre zobrazenie zmien vzhľadu oblohy s časom je otáčavá mapa oblohy. Jej pomocou môžeme pre ľubovoľný deň v roku a zvolený miestny čas zviditeľniť tú časť z oblohy, ktorá je práve nad horizontom. Obyčajne je v našich podmienkach skonštruovaná pre 50° severnej zemepisnej šírky.

(a) Ktoré súhvezdia sú na oblohe najväčšie a ktoré najmenšie ? Napíšte, ktoré sú prvé tri najväčšie a posledné tri najmenšie súhvezdia v poradí podľa rozlohy na oblohe.

(b) Vypíšte všetky, i z časti viditeľné súhvezdia nad obzorom 25. 8. 2007 o 21:30 hod. miestneho pásmového času.

(c) Kedy kulminuje v najvyššej výške nad južným obzorom v Krakowe (50° sev. zem. širky, 20° vých. zem. dĺžky) hviezda Capella?

(d) Ktorá hviezda prechádza veľmi blízko zenitu 25. 4. 2007 o 6 h 40 min UT (svetového času) blízko Mexico-city (20° N, 99° W)?

10.1.2 AO 2014, úloha 6

Z pozorovaní, alebo z iných dát, určite periódy obehu Jupiterových mesiacov Io, Europa a Ganymedes. Popíšte zdroje dát (vlastné pozorovania úkazov mesiacov, predpovede podľa rôznych aplikácii, predpovede polôh mesiacov podľa kalkulátorov a pod.) a spôsob výpočtu.

10.1.3 AO 2015, úloha 6

20. 3. 2015 bude úžasná príležitosť pozorovať úplné zatmenie Slnka (z nášho územia len ako čiastočné). V každom prípade je to príležitosť pre začínajúcich astronómov – pozorovateľov a budúcich vedeckých pracovníkov. Navrhnite si svoj postup pozorovania, pokúste sa dostupnými prístrojmi zatmenie odpozorovať, zaznamenajte napozorované údaje a urobte stručné vyhodnotenie. Pozorovať zatmenie nie je možné priamo bez ochranných filtrov a to ani voľným okom a ani pomocou ďalekohľadov. V prípade úplne zlého počasia popíšte len aké metódy na pozorovanie ste si pripravili a aké výsledky ste očakávali.

10.1.4 AO 2016, úloha 5

Dňa 9. mája 2016 nastane veľmi vzácny astronomický úkaz – prechod Merkúra popred disk Slnka. Navrhnite program (popis, postup, možné výsledky, očakávaná presnosť a pod.) pozorovania tohto úkazu na konkrétne vaše reálne prístrojové a topografické podmienky. Môžete priložiť fotografie, nákresy a pod., pričom sa očakáva, že v máji sa váš program pokúsite aj zrealizovať a nám pošlete aj konkrétne výsledky, fotografie a vaše skúsenosti a zážitky z takéhoto pozorovania.

10.2 Kategória SŠ, domáce kolo

10.2.1 AO 2009, úloha 7 – Galileiho dedičstvo

Na pripojenom obrázku vidíte kresbu časti oblohy ktorú urobil pri jednom z prvých pozorovaní ďalekohľadom v roku 1609 Galileo Galilei.

(a) Ktorú časť oblohy obrázok znázorňuje?

(b) Podľa katalógu nájdite najslabšiu hviezdu na kresbe a určite jej magnitúdu.

(c) Zistite pozorovaním alebo výpočtom, aký bol priemer objektívu Galileovho ďalekohľadu, ak hviezda v úlohe (b) bola na hranici pozorovateľnosti týmto ďalekohľadom. Vezmite do úvahy aj nedokonalosť vtedajšieho optického skla a stratu cca 7 % na každom rozhraní medzi sklom vzduchom v optickej schéme ďalekohľadu. Popíšte svoj postup.

Pomôcka: skúste pozorovať túto oblasť oblohy malým ďalekohľadom. Postupne vkladajte pred objektív clony so stále menším priemerom, až kým vami určená najslabšia hviezda nezmizne.

10.2.2 AO 2010, úloha 7

V mesiaci február 2010 pozorujte planétu Mars a zakresľujte jej polohu medzi hviezdami. Ku každému pozorovaniu uveďte miesto, dátum a čas.

10.2.3 AO 2011, úloha 7

Vykonajte začiatkom roka (január - marec 2011) ľubovoľné astronomické pozorovanie a nejakým spôsobom ho popíšte, zdokumentujte alebo uveďte získaný výsledok.

10.2.4 AO 2012, úloha 7

Od roku 2012 je už Slovensko oficiálne zapojené do projektu GLOBE at Night. Aj vy urobte aspoň jedno pozorovanie z Vášho obvyklého pozorovacieho miesta, zamerané na určenie stavu svetelného znečistenia. Na internetovej stránke: (`http://globeatnight.svetelneznecistenie.sk/category/aktuality/`) sú uvedené jednoduché pokyny a mapky, ako môžete určiť kvalitu vášho pozorovacieho stanovišťa. Po zotmení (keď je už dostatočná tma, teda počas astronomickej noci) nájdite na oblohe súhvezdie Orión (január, február, marec) alebo Lev (marec, apríl) a porovnajte Vašu skutočnú oblohu s mapkami (Orión/Lev), ktoré určujú rôzny stav svetelného znečistenia. Získaný výsledok zaznamenajte a vytlačte pre účely riešenia tejto úlohy AO. V prípade Vášho záujmu môžete výsledok odoslať aj podľa pokynov uvedenej stránky a zapojiť sa tak oficiálne do programu GLOBE at Night.

10.2.5 AO 2013, úloha 7

Od roku 2012 je Slovensko oficiálne zapojené do projektu GLOBE at Night. Aj v roku 2013 urobte aspoň jedno pozorovanie z vášho obvyklého pozorovacieho miesta, zamerané na určenie stavu svetelného znečistenia. Na internetovej stránke:
(`http://globeatnight.svetelneznecistenie.sk/category/aktuality/`) sú uvedené jednoduché pokyny a mapky, ako môžete určiť kvalitu vášho pozorovacieho stanovišťa. Získaný výsledok zaznamenajte a vytlačte pre účely riešenia tejto úlohy AO. V prípade Vášho záujmu môžete výsledok odoslať aj podľa pokynov uvedenej stránky a zapojiť sa tak oficiálne do programu GLOBE at Night.

10.2.6 AO 2014, úloha 6

Z pozorovaní, alebo z iných dát, určite periódy obehu Jupiterových mesiacov Io, Europa a Ganymedes. Popíšte zdroje dát (vlastné pozorovania úkazov mesiacov, predpovede podľa rôznych aplikácii, predpovede polôh mesiacov podľa kalkulátorov a pod.) a spôsob výpočtu.

10.2.7 AO 2015, úloha 5

20. 3. 2015 bude úžasná príležitosť pozorovať úplné zatmenie Slnka (z nášho územia len ako čiastočné). V každom prípade je to príležitosť pre začínajúcich astronómov – pozorovateľov a budúcich vedeckých pracovníkov. Navrhnite si svoj postup pozorovania, pokúste sa dostupnými

prístrojmi zatmenie odpozorovať, zaznamenajte napozorované údaje a urobte stručné vyhodnotenie. Pozorovať zatmenie nie je možné priamo bez ochranných filtrov a to ani voľným okom a ani pomocou ďalekohľadov. V prípade úplne zlého počasia popíšte len aké metódy na pozorovanie ste si pripravili a aké výsledky ste očakávali.

10.2.8 AO 2016, úloha 5

Dňa 9. mája 2016 nastane veľmi vzácny astronomický úkaz – prechod Merkúra popred disk Slnka. Navrhnite program (popis, postup, možné výsledky, očakávaná presnosť a pod.) pozorovania tohto úkazu na konkrétne vaše reálne prístrojové a topografické podmienky. Môžete priložiť fotografie, nákresy a pod., pričom sa očakáva, že v máji sa váš program pokúsite aj zrealizovať.

10.2.9 AO 2017, úloha 5

Polotieňové zatmenie Mesiaca nastane 10. – 11. februára 2017. Vykonajte pozorovanie tohto javu podľa vašich prístrojových možností a získané dáta priložte ako riešenie úlohy. V prípade nepriaznivého počasia predložte váš návrh na pozorovanie (prístrojové vybavenie, postup, spôsob pozorovania, očakávaný výsledok, fotografiu a pod.)

10.2.10 AO 2018, úloha 5

Navrhnite praktickú úlohu z astronómie, pričom je potrebné určiť vhodné prístrojové vybavenie a vo vašom prípade aj popísať, aké výsledky môžeme očakávať. Netreba zabudnúť ani na stanovenie presnosti pozorovania, aby sa dal dosiahnuť stanovený cieľ. Popis môžete doplniť o tabuľky, grafy a fotografie súvisiace s vami navrhnutou úlohou.

10.2.11 AO 2019, úloha 5

Začiatkom roka 2019 bude niekoľko astronomických úkazov, ktoré je možné pozorovať veľmi jednoduchými prístrojmi, prípadne aj voľným okom alebo fotoaparátom. 18. 2. 2019 konjunkcia Venuše so Saturnom, 27. 2. 2019 konjunkcia Jupitera s Mesiacom, 1. 3. 2019 konjunkcia a aj zákryt Saturna Mesiacom, 2. 3. 2019 konjunkcia Venuše s Mesiacom, 11. 3. 2019 konjunkcia Marsu s Mesiacom, 27. 3. 2019 konjunkcia Jupitera s Mesiacom, 29. 3. 2019 konjunkcia Saturna s Mesiacom. Presnejšie údaje o uvedených úkazoch sú publikované aj v časopise KOZMOS 1/2019, str. 49. Vašou úlohou je odpozorovať aspoň jeden z uvedených úkazov a popísať postup a metódu, ktorú použijete.

10.2.12 AO 2020, úloha 5

V tejto úlohe budete určovať limitnú magnitúdu na vašom pozorovacom mieste. Na jej určenie použijete 2 metódy, ktoré potom porovnáte. Na pozorovanie si vyberte miesto s vhodnými svetelnými podmienkami, snažte sa vyhnúť príliš veľkému svetelnému znečisteniu. Prvou metódou je hľadanie najslabšej viditeľnej hviezdy. Na oblohe nájdite viditeľnú hviezdu s čo najvyššou magnitúdou, pričom na zistenie jej magnitúdy môžete použiť ľubovoľný zdroj (hviezdne atlasy, Stellarium atď.). Za viditeľnú hviezdu považujte aj takú, ktorú vidíte napr. iba periférnym videním.

Druhý spôsob sa zakladá na počítaní viditeľných hviezd v určitej oblasti na oblohe. Vyberiete si 3 (príp. 4) hviezdy a zrátate počet hviezd, ktoré vidíte vnútri oblasti, ktorú tieto 3 hviezdy vytvárajú (zarátajte aj hviezdy tvoriace jej vrcholy). Výber trojuholníka hviezd si prispôsobte pozorovacím podmienkam. Použite napr. údaje z tejto stránky:
https://nineplanets.org/estimating-limiting-magnitude/
Môžete použiť aj nejaké iné podľa vášho výberu. V tom prípade ale k riešeniu úlohy nezabudnite priložiť aj zdroj odkiaľ ich máte. Limitnú magnitúdu určite počas 3 nocí. K výsledkom nezabudnite napísať miesto, dátumy a časy pozorovaní a pozorovacie podmienky. Porovnajte použité metódy na určenie medznej hviezdnej veľkosti. Dávajú približne rovnaký výsledok alebo sa líšia?

10.2.13 AO 2021, úloha 7

V mesiaci marci nastane jarná rovnodennosť. Vyberte si noc v okolí tohto dátumu ($\pm$ týždeň, podľa okolností) a vykonajte ľubovoľné nočné pozorovanie. Toto pozorovanie potom zdokumentujte a zdôvodnite vhodnosť a dôvod vášho výberu danej noci.

10.2.14 AO 2022, úloha 5

V mesiaci marec a apríl nastane niekoľko zákrytov hviezd (viditeľných voľným okom) Mesiacom. Skúste odpozorovať niektorý zákryt, ako vám to počasie dovolí. Postup, technické vybavenie, presun na miesto, pozorovacie miesto a získané výsledky diskutujte v krátkom zdokumentovaní/pojednaní. Popíšte aj vhodnosť a dôvod vášho výberu danej noci.

10.2.15 AO 2023, úloha 5

Od začiatku roka 2023 do leta sú vhodné podmienky na pozorovanie niekoľkých komét ako aj asteroidov Ceres a Pallas malými ďalekohľadmi. Skúste odpozorovať niektorý astronomický úkaz, ako vám to počasie dovolí. Postup, technické vybavenie, presun na miesto, pozorovacie miesto a získané výsledky diskutujte v krátkom zdokumentovaní/pojednaní. Popíšte aj vhodnosť a dôvod vášho výberu danej noci.

10.3 Kategória SŠ, finále

10.3.1 AO 2010, úloha 4

V priložených 4 tabuľkách sú údaje o pozorovaní 4 rôznych nebeských telies. Určte, ktoré sú to telesá a svoj postup zdôvodnite.
Poloha pozorovateľa: 49,205° N 15,000° E, čas: 12 hod. 00 min. SEČ.

Dátum	Azimut	Výška
10. 4. 2010	179°30′	48°48′
11. 4. 2010	179°36′	49°10′
12. 4. 2010	179°41′	49°32′
13. 4. 2010	179°47′	49°54′
14. 4. 2010	179°53′	50°16′
15. 4. 2010	179°59′	50°37′
16. 4. 2010	180°4′1	50°58′
17. 4. 2010	180°10′	51°20′
18. 4. 2010	180°15′	51°41′
19. 4. 2010	180°20′	52°1′
20. 4. 2010	180°26′	52°22′

Poloha pozorovateľa: 49,205°N, 15,000°E, čas: 12 hod. 00 min. SEČ.

Dátum	Hodinový uhol	Deklinácia
10. 4. 2010	$2^{h}\,56^{m}\,0^{s}$	−7°4′
11. 4. 2010	$2^{h}\,16^{m}\,0^{s}$	−2°3′
12. 4. 2010	$1^{h}\,35^{m}\,0^{s}$	3°13′
13. 4. 2010	$0^{h}\,54^{m}\,0^{s}$	8°19′
14. 4. 2010	$0^{h}\,1^{m}\,0^{s}$	13°15′
15. 4. 2010	$23^{h}\,23^{m}\,0^{s}$	17°36′
16. 4. 2010	$22^{h}\,34^{m}\,0^{s}$	21°7′
17. 4. 2010	$21^{h}\,41^{m}\,0^{s}$	23°33′
18. 4. 2010	$20^{h}\,54^{m}\,0^{s}$	24°9′
19. 4. 2010	$19^{h}\,49^{m}\,0^{s}$	24°14′
20. 4. 2010	$18^{h}\,53^{m}\,0^{s}$	22°17′

Poloha pozorovateľa: 50°N, 15°E, čas: 0 hod. 00 min. UTC.

0h00m UT	RA	Dec	Východ	Kulminácia	Západ	Az	Alt
2010-04-10	2h22m37.2s	+17°08'24"	5h43m	13h11m	20h39m	+357°21'	-22°58'
2010-04-20	2h35m59.1s	+18°09'30"	5h11m	12h45m	20h18m	+04°05'	-21°54'
2010-04-30	2h18m56.1s	+14°30'42"	4h34m	11h48m	19h02m	+19°16'	-23°39'
2010-05-10	2h04m43.2s	+10°27'28"	4h01m	10h55m	17h48m	+34°18'	-23°35'
2010-05-20	2h15m21.7s	+09°57'24"	3h35m	10h26m	17h17m	+41°33'	-21°09'
2010-05-30	2h49m36.1s	+12°50'13"	3h15m	10h21m	17h26m	+41°25'	-18°00'
2010-06-09	3h44m11.9s	+17°35'59"	3h05m	10h36m	18h06m	+35°50'	-15°14'
2010-06-19	5h00m10.9s	+22°23'35"	3h14m	11h12m	19h11m	+25°45'	-13°48'
2010-06-29	6h33m34.8s	+24°30'02"	3h54m	12h06m	20h18m	+12°48'	-14°40'
2010-07-09	8h04m09.8s	+22°16'36"	5h00m	12h57m	20h55m	+00°46'	-17°52'
2010-07-19	9h17m32.4s	+17°08'48"	6h04m	13h31m	20h59m	+351°59'	-22°39'
2010-07-29	10h13m22.7s	+11°01'06"	6h52m	13h48m	20h43m	+346°44'	-28°14'
2010-08-08	10h52m48.9s	+05°14'35"	7h20m	13h48m	20h15m	+345°40'	-33°56'
2010-08-18	11h12m16.5s	+01°13'19"	7h19m	13h28m	19h37m	+351°11'	-38°35'
2010-08-28	11h03m00.4s	+01°08'07"	6h31m	12h39m	18h48m	+06°56'	-38°48'
2010-09-07	10h33m01.6s	+05°52'58"	4h59m	11h30m	18h00m	+26°45'	-30°49'
2010-09-17	10h32m59.8s	+09°11'58"	4h04m	10h50m	17h37m	+35°54'	-24°21'
2010-09-27	11h20m15.9s	+06°10'16"	4h26m	10h58m	17h30m	+35°11'	-27°53'
2010-10-07	12h24m18.0s	-00°44'40"	5h23m	11h23m	17h22m	+31°19'	-36°33'
2010-10-17	13h27m42.3s	-08°14'37"	6h22m	11h47m	17h11m	+26°56'	-45°34'
2010-10-27	14h29m12.2s	-14°57'11"	7h17m	12h09m	17h00m	+21°41'	-53°30'
2010-11-06	15h30m39.7s	-20°21'29"	8h09m	12h31m	16h53m	+14°17'	-59°54'
2010-11-16	16h32m52.1s	-24°05'50"	8h54m	12h54m	16h53m	+03°45'	-64°12'
2010-11-26	17h33m06.2s	-25°47'24"	9h26m	13h15m	17h03m	+352°11'	-65°47'
2010-12-06	18h18m39.2s	-25°10'45"	9h28m	13h21m	17h13m	+348°59'	-65°01'
2010-12-16	18h12m53.2s	-22°39'25"	8h27m	12h35m	16h44m	+12°54'	-62°20'
2010-12-26	17h21m50.2s	-20°05'57"	6h41m	11h05m	15h29m	+48°48'	-52°13'
2011-01-05	17h24m09.2s	-20°49'18"	6h08m	10h28m	14h47m	+60°45'	-47°51'
2011-01-15	18h07m15.3s	-22°34'10"	6h22m	10h32m	14h41m	+61°22'	-49°46'
2011-01-25	19h05m32.8s	-23°05'54"	6h44m	10h50m	14h56m	+56°16'	-52°49'
2011-02-04	20h09m55.6s	-21°39'04"	7h00m	11h15m	15h30m	+46°37'	-54°48'
2011-02-14	21h16m56.2s	-17°57'59"	7h07m	11h43m	16h19m	+33°32'	-54°24'
2011-02-24	22h25m23.2s	-11°57'31"	7h05m	12h12m	17h19m	+19°19'	-50°46'
2011-03-06	23h34m38.2s	-03°48'22"	6h56m	12h42m	18h28m	+06°36'	-43°47'
2011-03-16	0h39m06.5s	+05°10'52"	6h39m	13h07m	19h35m	+358°07'	-34°57'
2011-03-26	1h19m45.4s	+11°27'56"	6h10m	13h08m	20h06m	+357°56'	-28°40'
2011-04-05	1h19m18.4s	+11°46'38"	5h28m	12h28m	19h28m	+09°04'	-27°57'
2011-04-15	0h55m52.1s	+07°09'49"	4h48m	11h25m	18h03m	+27°33'	-29°15'

Poloha pozorovateľa: 50°N, 15°E, čas: 0 hod. 00 min. UTC.

0h00m UT	RA	Dec	Východ	Kulminácia	Západ	Az	Alt
2010-04-10	23h21m41.4s	-05°12'19"	4h30m	10h10m	15h49m	+53°46'	-32°30'
2010-04-20	23h29m49.6s	-04°21'46"	3h55m	9h38m	15h22m	+60°47'	-27°30'
2010-04-30	23h37m33.0s	-03°33'47"	3h20m	9h07m	14h54m	+67°21'	-22°12'
2010-05-10	23h44m47.1s	-02°48'56"	2h44m	8h35m	14h25m	+73°36'	-16°40'
2010-05-20	23h51m26.7s	-02°07'55"	2h08m	8h02m	13h56m	+79°41'	-10°56'
2010-05-30	23h57m26.1s	-01°31'24"	1h32m	7h28m	13h25m	+85°43'	-05°03'
2010-06-09	0h02m40.0s	-01°00'02"	0h55m	6h54m	12h53m	+91°51'	+00°43'
2010-06-19	0h07m01.9s	-00°34'32"	0h18m	6h19m	12h20m	+98°15'	+06°26'
2010-06-29	0h10m25.9s	-00°15'29"	23h41m	5h43m	11h46m	+105°04'	+12°23'
2010-07-09	0h12m46.7s	-00°03'27"	23h03m	5h06m	11h09m	+112°29'	+18°15'
2010-07-19	0h13m58.8s	+00°01'05"	22h24m	4h28m	10h32m	+120°46'	+23°53'
2010-07-29	0h13m59.6s	-00°02'05"	21h45m	3h48m	9h52m	+130°07'	+29°04'
2010-08-08	0h12m48.6s	-00°12'54"	21h05m	3h08m	9h11m	+140°47'	+33°33'
2010-08-18	0h10m28.2s	-00°30'57"	20h25m	2h26m	8h27m	+152°52'	+37°00'
2010-08-28	0h07m06.6s	-00°55'10"	19h44m	1h43m	7h43m	+166°13'	+39°03'
2010-09-07	0h02m56.1s	-01°24'07"	19h02m	1h00m	6h57m	+180°18'	+39°25'
2010-09-17	23h58m13.7s	-01°55'46"	18h21m	0h15m	6h10m	+194°20'	+37°58'
2010-09-27	23h53m20.8s	-02°27'45"	17h39m	23h31m	5h24m	+207°34'	+34°52'
2010-10-07	23h48m38.8s	-02°57'42"	16h57m	22h47m	4h37m	+219°33'	+30°25'
2010-10-17	23h44m29.3s	-03°23'20"	16h15m	22h03m	3h52m	+230°14'	+25°01'
2010-10-27	23h41m10.7s	-03°42'50"	15h34m	21h21m	3h07m	+239°46'	+19°02'
2010-11-06	23h38m55.7s	-03°54'58"	14h54m	20h39m	2h25m	+248°23'	+12°47'
2010-11-16	23h37m53.3s	-03°58'58"	14h13m	19h59m	1h44m	+256°21'	+06°30'
2010-11-26	23h38m06.7s	-03°54'40"	13h34m	19h19m	1h05m	+263°53'	+00°35'
2010-12-06	23h39m35.0s	-03°42'15"	12h55m	18h41m	0h28m	+271°12'	-05°17'
2010-12-16	23h42m15.4s	-03°22'09"	12h17m	18h05m	23h53m	+278°27'	-11°00'
2010-12-26	23h46m01.8s	-02°55'03"	11h39m	17h29m	23h19m	+285°49'	-16°21'
2011-01-05	23h50m47.8s	-02°21'39"	11h02m	16h54m	22h47m	+293°25'	-21°14'
2011-01-15	23h56m26.7s	-01°42'43"	10h25m	16h21m	22h16m	+301°22'	-25°36'
2011-01-25	0h02m50.8s	-00°59'06"	9h48m	15h48m	21h47m	+309°44'	-29°22'
2011-02-04	0h09m53.8s	-00°11'32"	9h12m	15h15m	21h18m	+318°34'	-32°28'
2011-02-14	0h17m29.2s	+00°39'13"	8h37m	14h43m	20h50m	+327°50'	-34°48'
2011-02-24	0h25m30.8s	+01°32'23"	8h01m	14h12m	20h23m	+337°27'	-36°19'
2011-03-06	0h33m53.4s	+02°27'17"	7h26m	13h41m	19h56m	+347°14'	-36°58'
2011-03-16	0h42m31.9s	+03°23'15"	6h51m	13h10m	19h30m	+356°59'	-36°43'
2011-03-26	0h51m21.3s	+04°19'36"	6h16m	12h40m	19h03m	+06°30'	-35°38'
2011-04-05	1h00m17.5s	+05°15'48"	5h41m	12h09m	18h37m	+15°36'	-33°44'
2011-04-15	1h09m15.9s	+06°11'14"	5h06m	11h39m	18h11m	+24°10'	-31°09'

10.3.2 AO 2015, Identifikácia telies na oblohe

(A) S krokom jedného dňa sú pre 21:00 SELČ udané pre neznáme teleso hodinový uhol HA a deklinácia δ. O ktoré teleso sa jedná?

Dátum	HA	δ
20. 4. 2015	$06^h\,27^m\,49^s$	15°3′5″
21. 4. 2015	$05^h\,34^m\,08^s$	16°52′30″
22. 4. 2015	$04^h\,41^m\,22^s$	17°38′23″
23. 4. 2015	$03^h\,50^m\,10^s$	17°22′54″
24. 4. 2015	$03^h\,00^m\,58^s$	16°12′14″
25. 4. 2015	$02^h\,13^m\,55^s$	14°14′2″
26. 4. 2015	$01^h\,28^m\,52^s$	11°39′12″
27. 4. 2015	$00^h\,45^m\,28^s$	8°34′19″
28. 4. 2015	$00^h\,03^m\,14^s$	5°8′6″
29. 4. 2015	$23^h\,21^m\,35^s$	1°28′12″
30. 4. 2015	$22^h\,39^m\,55^s$	−2°17′48″

(B) V tabuľke sú s krokom 10 dní efemeridy neznámeho nebeského telesa. Pre polnoc UTC sú udané rektascenzia, deklinácia, zdanlivá magnitúda a priemer. Viete o ktoré teleso sa jedná?

Dátum	rektascenzia	deklinácia	magnitúda	priemer
25. 5. 2009	$21^h\,54^m\,42{,}42^s$	−13°31′10,6″	-2,25	40,812″
4. 6. 2009	$21^h\,56^m\,44{,}36^s$	−13°23′9,2″	-2,32	42,156″
14. 6. 2009	$21^h\,57^m\,34{,}50^s$	−13°21′30,9″	-2,40	43,521″
24. 6. 2009	$21^h\,57^m\,10{,}56^s$	−13°26′27,9″	-2,47	44,860″
4. 7. 2009	$21^h\,55^m\,33{,}10^s$	−13°37′50,4″	-2,54	46,113″
14. 7. 2009	$21^h\,52^m\,47{,}14^s$	−13°54′59,2″	-2,60	47,14″
24. 7. 2009	$21^h\,49^m\,1{,}21^s$	−14°16′54,3″	-2,65	48,093″
3. 8. 2009	$21^h\,44^m\,29{,}45^s$	−14°42′4,2″	-2,69	48,683″
13. 8. 2009	$21^h\,39^m\,30{,}52^s$	−15°8′38,7″	-2,71	48,938″
23. 8. 2009	$21^h\,34^m\,25{,}32^s$	−15°34′44,9″	-2,70	48,834″
2. 9. 2009	$21^h\,29^m\,36{,}94^s$	−15°58′28,1″	-2,67	48,379″
12. 9. 2009	$21^h\,25^m\,26{,}43^s$	−16°18′16,5″	-2,63	47,613″
22. 9. 2009	$21^h\,22^m\,11{,}20^s$	−16°33′2,6″	-2,57	46,593″
2. 10. 2009	$21^h\,20^m\,4{,}89^s$	−16°41′59,2″	-2,51	45,390″
12. 10. 2009	$21^h\,19^m\,14{,}83^s$	−16°44′48,3″	-2,44	44,077″
22. 10. 2009	$21^h\,19^m\,44{,}05^s$	−16°41′24,7″	-2,37	42,717″
1. 11. 2009	$21^h\,21^m\,31{,}91^s$	−16°31′54,0″	-2,30	41,365″
11. 11. 2009	$21^h\,24^m\,33{,}87^s$	−16°16′33,4″	-2,23	40,062″

(C) S krokom 5 dní sú pre neznáme teleso udané okamihy východu, kulminácie a západu (49°12′ N, 18°45′ E, časy sú v SEČ). O ktoré teleso sa jedná?

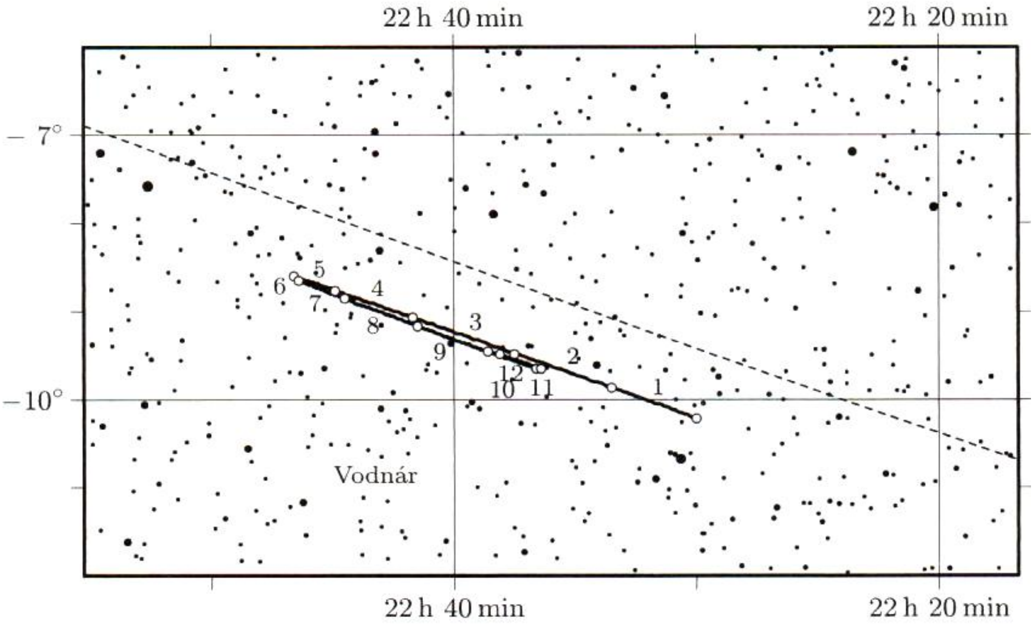
Dátum	východ	kulminácia	západ
20. 7. 2015	8:16	15:01	21:46
25. 7. 2015	8:02	14:41	21:20
30. 7. 2015	7:43	14:18	20:53
4. 8. 2015	7:18	13:51	20:23
9. 8. 2015	6:48	13:20	19:53
14. 8. 2015	6:15	12:49	19:22
19. 8. 2015	5:40	12:17	18:53
24. 8. 2015	5:07	11:47	18:27
29. 8. 2015	4:36	11:20	18:04
3. 9. 2015	4:09	10:57	17:45
8. 9. 2015	3:47	10:38	17:30
13. 9. 2015	3:29	10:23	17:17

(D) Z údajov o azimute a výške s krokom 1 hodina identifikujte objekt (49°12′20″ N).

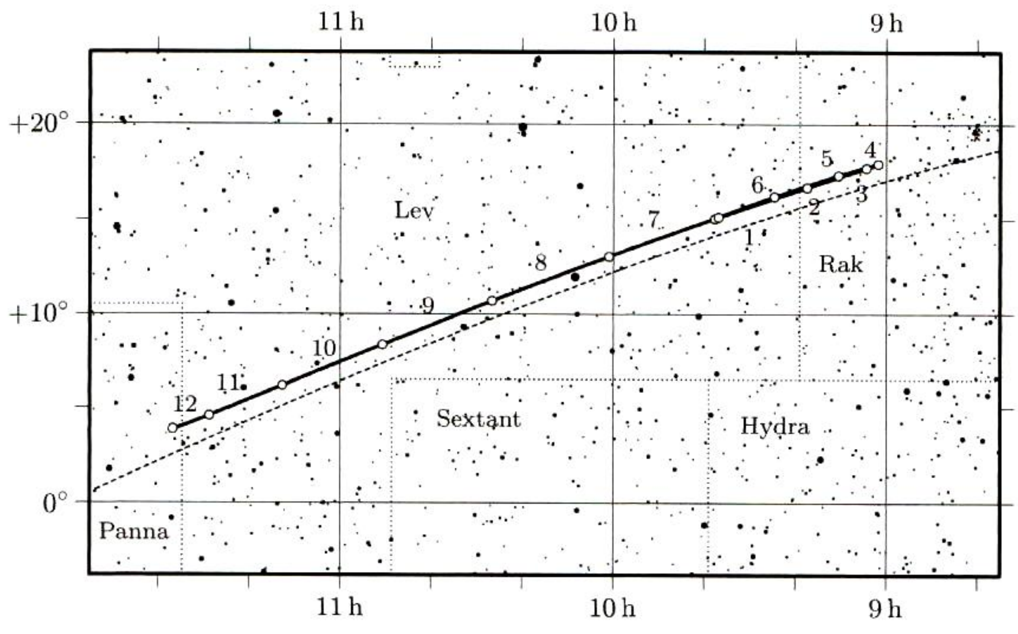
SELČ	azimut	výška
17. 4. 2015, 04	355°56′57″	5°21′11″
05	6°25′31″	5°33′25″
06	16°44′6″	7°31′52″
07	26°38′44″	11°9′54″
08	36°0′34″	16°6′33″
09	44°46′39″	22°38′39″
10	52°59′22″	30°2′46″
11	60°45′25″	38°16′20″
12	68°15′54″	47°8′14″
13	75°46′32″	56°28′40″
14	84°6′34″	66°8′34″
15	95°24′9″	75°57′12″
16	129°41′26″	85°12′1″
17	247°40′39″	82°43′1″
18	268°33′5″	73°4′58″
19	278°27′47″	63°17′22″
20	286°25′13″	53°42′13″
21	293°55′13″	44°29′12″
22	301°28′47″	35°47′27″
23	309°21′42″	27°47′8″
18. 4. 2015, 00	317°43′40″	20°39′49″
01	326°40′11″	14°38′23″
02	336°12′11″	9°59′22″
03	346°15′0″	6°46′29″
04	356°38′8″	5°18′41″

10.3.3 AO 2017, úloha 5

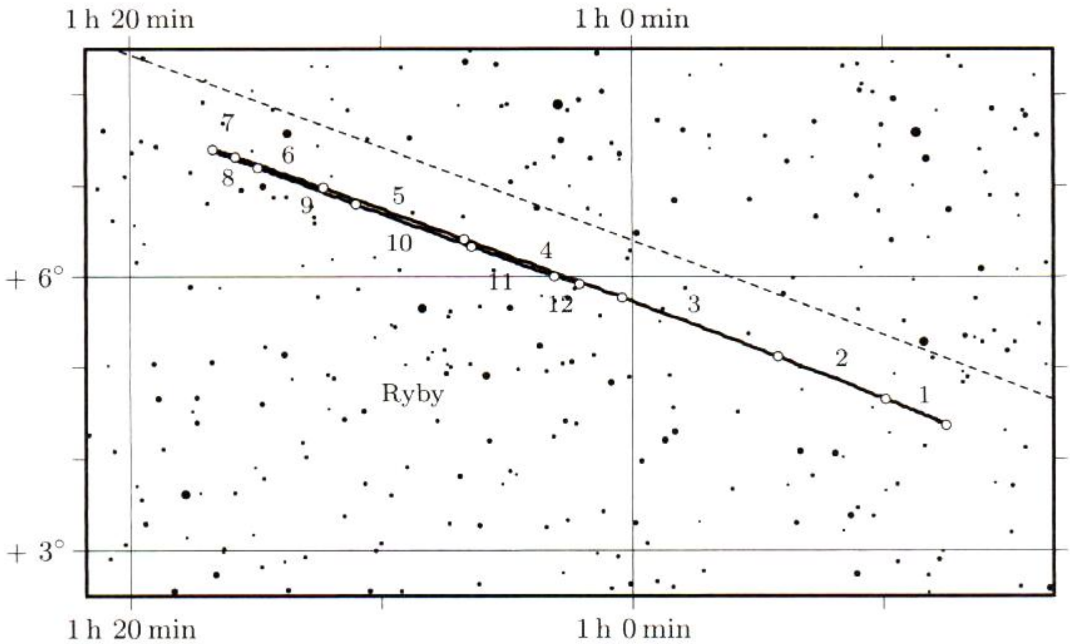
Identifikujte planéty podľa ich ročného pohybu na obrázkoch 10.1, 10.2, 10.3, 10.4.



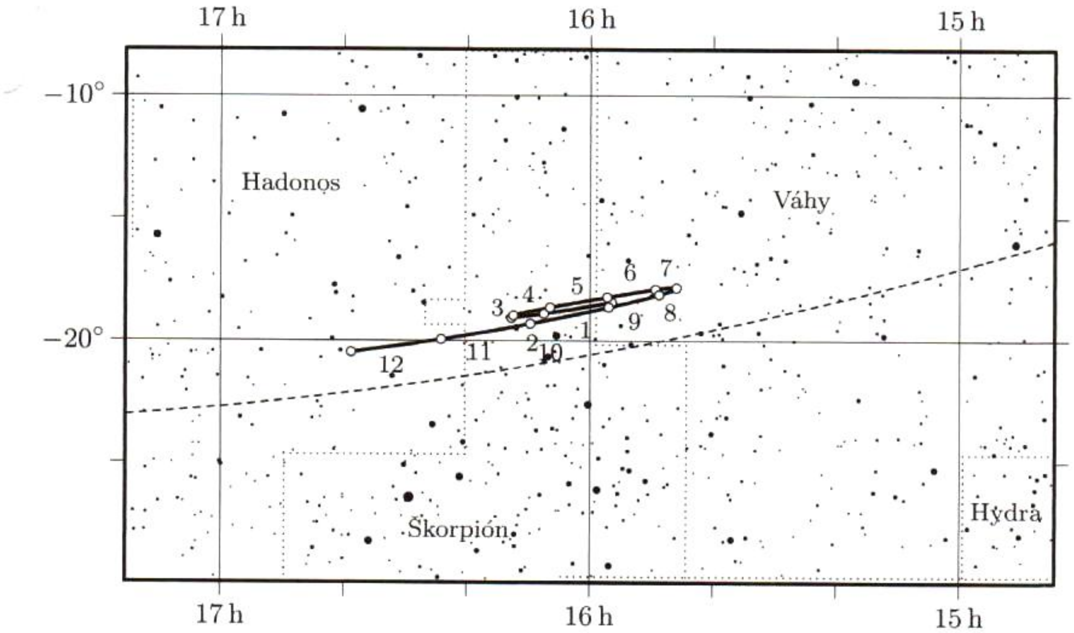
Obr. 10.1: Pohyb neznámej planéty 1 po oblohe.



Obr. 10.2: Pohyb neznámej planéty 2 po oblohe.



Obr. 10.3: Pohyb neznámej planéty 3 po oblohe.



Obr. 10.4: Pohyb neznámej planéty 4 po oblohe.

10.3.4 AO 2021, Praktická úloha

Slepú mapu môžete nájsť na obrázku 10.5, vyznačte do nej

(a) šrafovaním a skratkou súhvezdia Južná koruna, Vlk a Južný trojuholník, (12 b)

(b) jednu oblasť ionizovaného vodíka HII, tmavú hmlovinu, otvorenú hviezdokopu, guľovú hviezdokopu a galaxiu podľa svojho výberu a jej pomenovanie/označenie, (10 b)

(c) hviezdy α Sco, α Cir, Acrux, Menkent, Nunki, Peacock, Shaula, (14 b)

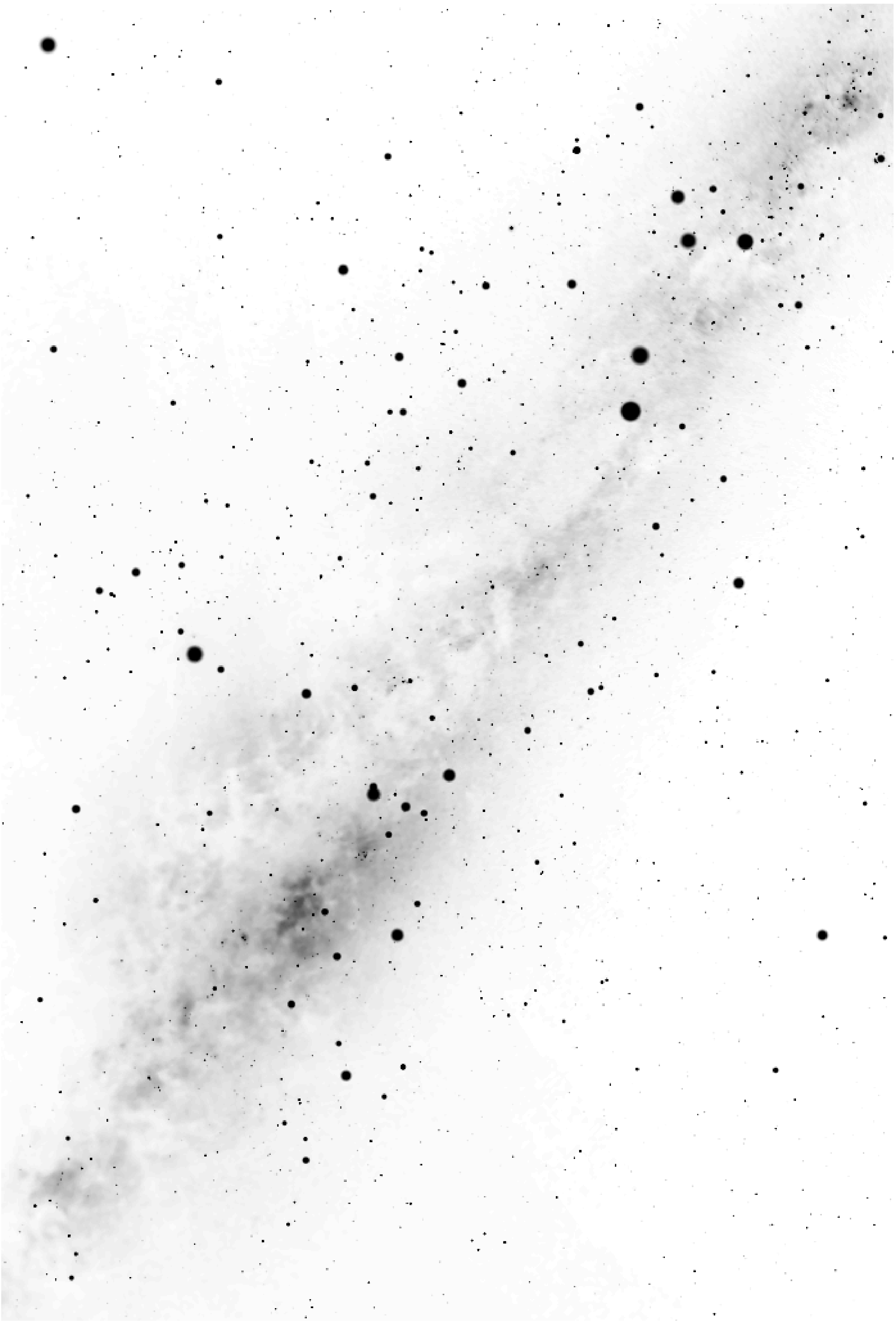
(d) ekliptiku a galaktický rovník, (6 b)

(e) najbližšiu hviezdu k Zemi (po Slnku) a jej meno. (3 b)

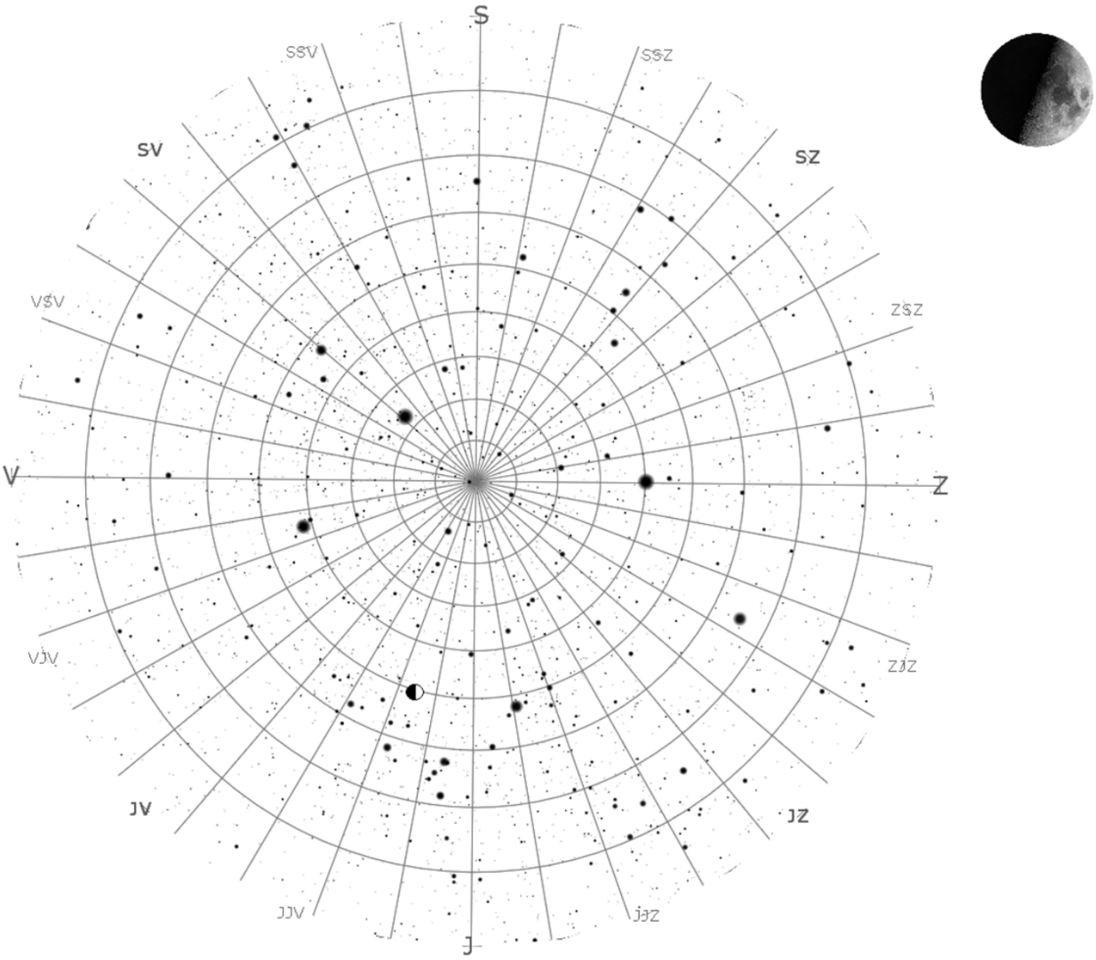
(f) V ktorom mesiaci kulminuje o pravej polnoci miestneho času stred mapy? Vychádza na Slovensku nad obzor? (5 b)

10.3.5 AO 2023, úloha 4 – Praktická úloha

Z mapky na obr. 10.6 odhadnite dátum a zemepisnú šírku, pre ktoré bola mapka vytvorená. Nachádza sa Slnko nad horizontom? Tolerancia v dátume je ± 5 dní, tolerancia v zemepisnej šírke je $\pm 3°$. V mapke je zaznačená poloha Mesiaca, a v pravom hornom rohu je jeho zväčšený obrázok.



Obr. 10.5: Slepá mapa oblohy



Obr. 10.6: Mapa oblohy.

Časť II

Riešenia príkladov

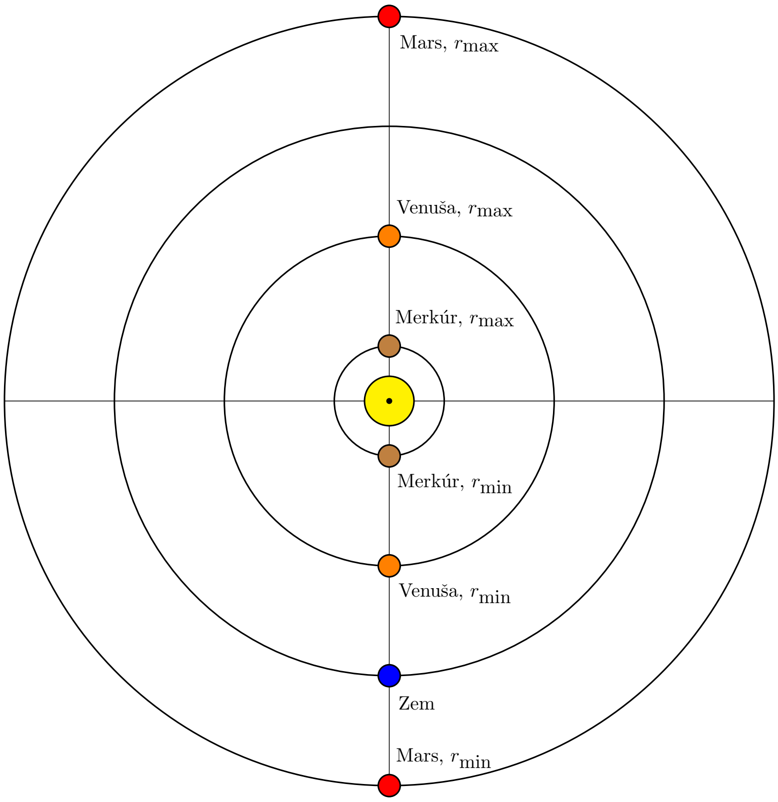
Kapitola 1

Nebeská mechanika (riešenia)

1.1 Kategória ZŠ, domáce kolo – riešenia

1.1.1 AO 2007, úloha 1 (riešenia) – riešenie

Planéta je v najväčšej/najmenšej vzdialenosti od Zeme v momente, kedy sa spolu so Zemou a Slnkom nachádza na jednej priamke (viď obrázok). Tieto vzdialenosti sú:



Merkúr:

$$r_{\min} = a_{\oplus} - a_{\mathrm{M}} = 1 - 0{,}387 = 0{,}613\,\mathrm{au}\,, \tag{1.1}$$

$$r_{\max} = a_{\oplus} + a_{\mathrm{M}} = 1 + 0{,}387 = 1{,}387\,\mathrm{au}\,, \tag{1.2}$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1{,}387}{0{,}613} = 2{,}26\,. \tag{1.3}$$

Venuša:

$$r_{\min} = a_{\oplus} - a_{\mathrm{V}} = 1 - 0{,}723 = 0{,}277\,\mathrm{au}\,, \tag{1.4}$$

$$r_{\max} = a_{\oplus} + a_{\mathrm{V}} = 1 + 0{,}723 = 1{,}723\,\mathrm{au}\,, \tag{1.5}$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1{,}723}{0{,}277} = 6{,}22\,. \tag{1.6}$$

Mars:

$$r_{\min} = a_{♂} - a_{\oplus} = 1{,}524 - 1 = 0{,}524\,\mathrm{au}\,, \tag{1.7}$$

$$r_{\min} = a_{♂} + a_{\oplus} = 1{,}524 + 1 = 2{,}524\,\mathrm{au}\,, \tag{1.8}$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{2{,}524}{0{,}524} = 4{,}82\,. \tag{1.9}$$

Najväčší pomer maximálnej a minimálnej vzdialenosti od Zeme má Venuša.

1.1.2 AO 2007, úloha 3 – riešenie

Na základe toho, že planétku pozorujeme v opozícii, vieme, že je vonkajšia. Vzťah medzi jej synodickou a siderickou obežnou dobou je

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P}\,, \tag{1.10}$$

P je siderická obežná doba planétky a $P_{\oplus}$ je siderická obežná doba Zeme.

$$P = \frac{S P_{\oplus}}{S - P_{\oplus}}\,, \tag{1.11}$$

$$P = \frac{665 \cdot 365{,}25}{665 - 365{,}25} = 810{,}31\,\mathrm{dní} = 2{,}219\,\mathrm{rokov}\,. \tag{1.12}$$

Pre objekty v slnečnej sústave sa dá použiť zjednodušená podoba 3. Keplerovho zákona, do ktorej sa obežná doba P dosadí v rokoch a veľká polos a v astronomických jednotkách

$$P^2 = a^3\,, \tag{1.13}$$

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{2{,}219^2} = 1{,}701\,\mathrm{au}\,. \tag{1.14}$$

1.1.3 AO 2008, úloha 2 – riešenie

Veľká polos je priemerom vzdialenosti perihélia a afélia kométy od Slnka.

$$a = \frac{r_{\mathrm{p}} + r_{\mathrm{a}}}{2} = \frac{0{,}5 + 31{,}5}{2} = 16\,\mathrm{au}\,. \tag{1.15}$$

Obežná doba je

$$P = \sqrt{a^3} = \sqrt{16^3} = 64\,\mathrm{rokov}\,. \tag{1.16}$$

1.1.4 AO 2014, úloha 5 – Obeh kométy – riešenie

$$a = \frac{r_{\mathrm{p}} + r_{\mathrm{a}}}{2} = \frac{0{,}5 + 61{,}5}{2} = 31\,\mathrm{au}\,, \tag{1.17}$$

$$P = \sqrt{a^3} = \sqrt{31^3} = 172{,}6\,\mathrm{rokov}\,. \tag{1.18}$$

1.1.5 AO 2015, úloha 1 – Blízkozemský asteroid – riešenie

Ak je asteroid vnútorný, jeho siderická obežná doba je

$$P = \frac{SP_\oplus}{S + P_\oplus} = \frac{1200 \cdot 365{,}25}{1200 + 365{,}25} = 280{,}02\,\text{dní} = 0{,}767\,\text{rokov}\,. \tag{1.19}$$

Veľká polos je v tomto prípade

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{0{,}767^2} = 0{,}838\,\text{au}\,. \tag{1.20}$$

Vzdialenosť afélia asteroidu od Slnka je

$$r_\text{a} = a(1 + e) = 1{,}4 \cdot 0{,}838 = 1{,}17\,\text{au}\,. \tag{1.21}$$

Ak je asteroid vonkajší, siderická obežná doba je

$$P = \frac{SP_\oplus}{S - P_\oplus} = \frac{1200 \cdot 365{,}25}{1200 - 365{,}25} = 525{,}07\,\text{dní} = 1{,}438\,\text{rokov}\,. \tag{1.22}$$

Veľká polos a vzdialenosť afélia sú

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{1{,}438^2} = 1{,}274\,\text{au}\,, \tag{1.23}$$

$$r_\text{a} = a(1 + e) = 0{,}6 \cdot 1{,}274 = 0{,}764\,\text{au}\,. \tag{1.24}$$

V obidvoch prípadoch asteroid križuje dráhu Zeme a tak sa môže k Zemi dostať ľubovoľne blízko.

1.2 Kategória ZŠ, finále – riešenia

1.2.1 AO 2007, úloha 8 – riešenie

Použijeme 3. Keplerov zákon

$$P^2 = a^3\,, \tag{1.25}$$

$$P = \sqrt{a^3} = \sqrt{30{,}178^3} = 165{,}8\,\mathrm{rokov}\,. \tag{1.26}$$

1.2.2 AO 2011, úloha 1 – riešenie

Vzdialenosť ťažiska od stredu Zeme odhadneme pomocou vzorca, ktorý sa používa pre ťažisko dvoch hmotných bodov

$$r_{\oplus T} = \frac{M_☾}{M_☾ + M_\oplus} a_☾\,, \tag{1.27}$$

$$r_{\oplus \mathrm{T}} = \frac{\frac{1}{81}}{\frac{1}{81} + 1} \cdot 3{,}844 \cdot 10^8 = \frac{1}{82} \cdot 3{,}844 \cdot 10^8 = 4{,}688 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\,. \tag{1.28}$$

Ťažisko sa nachádza iba 4688 km od stredu Zeme, je teda ešte pod povrchom Zeme.

1.2.3 AO 2011, úloha 2 – riešenie

Druhá kozmická (úniková) rýchlosť sa vypočíta podľa vzorca

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3}} = 11\,200\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 11{,}2\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.29}$$

1.2.4 AO 2011, úloha 3 – riešenie

Obežná rýchlosť Zeme je

$$v_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}}\,. \tag{1.30}$$

Uhlová rýchlosť Zeme

$$\omega_\oplus = \frac{v_{\mathrm{k}}}{a_\oplus}\,. \tag{1.31}$$

Uhlovú rýchlosť prepočítame do radiánov za sekundu

$$\omega_\oplus = \frac{2\pi}{360 \cdot 86400}\,, \tag{1.32}$$

$$a_\oplus^2 \omega_\oplus^2 = \frac{GM_\odot}{a_\oplus}\,. \tag{1.33}$$

Hmotnosť Slnka je

$$M_\odot = \frac{\omega_\oplus^2 a_\oplus^3}{G} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^3}{360^2 \cdot 86400^2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11}} = 2{,}05 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\,. \tag{1.34}$$

1.2.5 AO 2012, úloha 2 – riešenie

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi a_\mathrm{J}}{P_\mathrm{J}}\,, \tag{1.35}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot 5{,}204 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{11{,}87 \cdot 365{,}25 \cdot 86400} = 13\,060\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 13{,}06\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.36}$$

1.3 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

1.3.1 AO 2008, úloha 5 – riešenie

Polomer hviezdokopy je 6 pc. Úniková rýchlosť na jej okraji je

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2GNm}{R}}\,, \tag{1.37}$$

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 60000 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}}} = 9270\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 9{,}27\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.38}$$

1.3.2 AO 2010, úloha 6 – Asteroid – riešenie

Ak sa dráha asteroidu nachádza vnútri dráhy Zeme, pre siderickú obežnú dobu asteroidu platí

$$P = \frac{SP_{\oplus}}{S + P_{\oplus}} = \frac{2{,}5 \cdot 1}{2{,}5 + 1} = 0{,}71\,\mathrm{roka}\,. \tag{1.39}$$

Polomer dráhy asteroidu dopočítame z 3. Keplerovho zákona

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{0{,}71^2} = 0{,}8\,\mathrm{au}\,. \tag{1.40}$$

V prípade, že sa jedná o vonkajší asteroid, platí pre jeho siderickú obežnú dobu

$$P = \frac{SP_{\oplus}}{S - P_{\oplus}} = \frac{2{,}5 \cdot 1}{2{,}5 - 1} = 1{,}67\,\mathrm{roka}\,. \tag{1.41}$$

Polomer dráhy je vtedy

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{1{,}67^2} = 1{,}4\,\mathrm{au}\,. \tag{1.42}$$

1.3.3 AO 2012, úloha 2 – riešenie

(a) Obežnú dobu získame z 3. Keplerovho zákona

$$P = \sqrt{a^3} = \sqrt{1{,}92^3} = 2{,}66\,\mathrm{roka}\,. \tag{1.43}$$

(b) Vzdialenosť perihélia od Slnka je

$$r_{\mathrm{p}} = a(1 - e) = 1{,}92 \cdot (1 - 0{,}75) = 0{,}48\,\mathrm{au}\,. \tag{1.44}$$

(c) Medzi veľkou polosou, malou polosou a excentricitou elipsy platí nasledujúci vzťah

$$b^2 + e^2a^2 = a^2\,, \tag{1.45}$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 1{,}92 \cdot \sqrt{1 - 0{,}75^2} = 1{,}27\,\mathrm{au}\,. \tag{1.46}$$

1.3.4 AO 2013, úloha 2 – riešenie

Pre hmotnosti udané v jednotkách hmotnosti Slnka, obežnú dobu v rokoch a veľkú polos v astronomických jednotkách platí 3. Keplerov zákon v nasledujúcom tvare

$$a^3 = T^2(M_1 + M_2)\,, \tag{1.47}$$

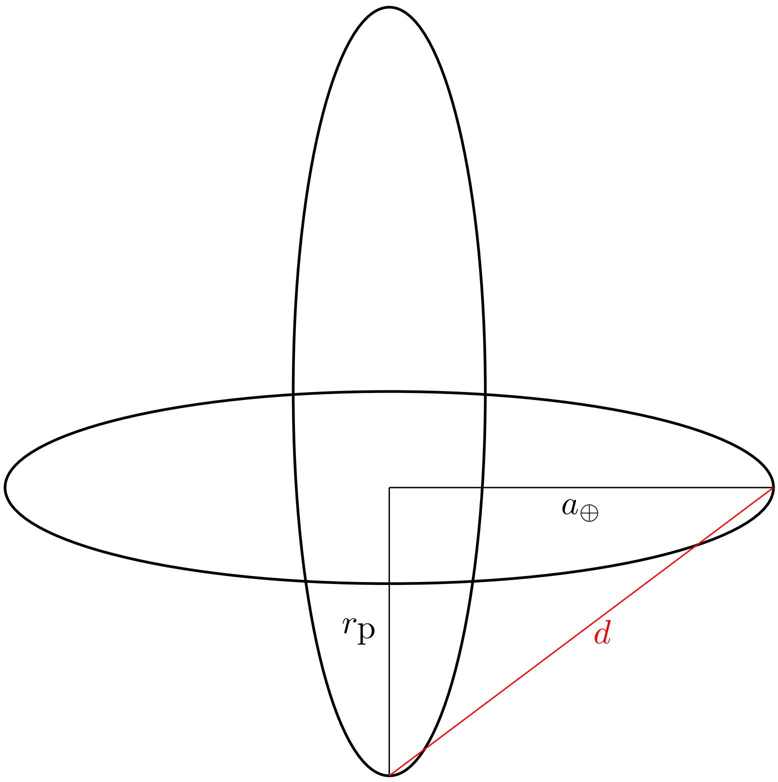
$$a = \sqrt[3]{T^2(M_1 + M_2)} = \sqrt[3]{25^2 \cdot (2 + 4)} = 15{,}54\,\mathrm{au}\,. \tag{1.48}$$

Ak je veľká polos v astronomických jednotkách a uhol, pod ktorým ju pozorujeme v uhlových sekundách, potom je vzdialenosť dvojhviezdy v parsekoch

$$d = \frac{a}{\alpha} = \frac{15{,}54}{0{,}50} = 31{,}08\,\mathrm{pc}\,. \tag{1.49}$$

1.3.5 AO 2013, úloha 3 – riešenie

Kométa sa pohybuje v rovine kolmej na rovinu dráhy Zeme. Vzdialenosť kométy v perihéliu od Zeme vypočítame z Pytagorovej vety (viď obrázok).



$$r_\mathrm{p} = a(1 - e) = 10 \cdot (1 - 0{,}9) = 1\,\mathrm{au}\,, \tag{1.50}$$

$$d = \sqrt{a_\oplus^2 + r_\mathrm{p}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1{,}41\,\mathrm{au}\,. \tag{1.51}$$

1.3.6 AO 2016, úloha 1 – Asteroidy v Slnečnej sústave – riešenie

Vzdialenosti perihélií sú

$$r_{\mathrm{p1}} = a_1(1 - e_1) = 2{,}5 \cdot (1 - 0{,}4) = 1{,}5\,\mathrm{au}\,, \tag{1.52}$$

$$r_{\mathrm{p2}} = a_2(1 - e_2) = 3 \cdot (1 - 0{,}3) = 2{,}1\,\mathrm{au}\,. \tag{1.53}$$

Vzdialenosť asteroidov vypočítame z Pytagorovej vety

$$d = \sqrt{r_{\mathrm{p1}}^2 + r_{\mathrm{p2}}^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}1^2} = 2{,}58\,\mathrm{au}\,. \tag{1.54}$$

1.3.7 AO 2017, úloha 4 – Dvojhviezdny systém – riešenie

Veľkú polos relatívnej dráhy dvojhviezdy pozorujeme pod uhlom

$$\alpha = \frac{7+1}{2} = 4''\,. \tag{1.55}$$

Skutočná veľkosť tejto veľkej polosi je

$$a = \alpha d = 4 \cdot 10 = 40\,\mathrm{au}\,. \tag{1.56}$$

Súčet hmotností hviezd vypočítame pomocou 3. Kepleroveho zákona

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2} = \frac{40^3}{100^2} = 6{,}4\,M_\odot\,. \tag{1.57}$$

Pomer hmotností hviezd sa rovná prevrátenému pomeru veľkých polosí ich dráh

$$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 4'' - 3'' = 1''\,, \tag{1.58}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{3}\,. \tag{1.59}$$

Jednotlivé hmotnosti hviezd sú

$$M_1 = \frac{1}{4} \cdot 6{,}4 = 1{,}6\,M_\odot\,, \tag{1.60}$$

$$M_2 = \frac{3}{4} \cdot 6{,}4 = 4{,}8\,M_\odot\,. \tag{1.61}$$

1.3.8 AO 2019, úloha 3 – Umelá družica Zeme – riešenie

Najskôr vypočítame veľkú polos dráhy družice

$$a = \frac{(h_1 + R_\oplus) + (h_2 + R_\oplus)}{2} = \frac{5000 + 300 + 2 \cdot 6378}{2} = 9028\,\mathrm{km} = 9{,}028 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\,. \tag{1.62}$$

Obežnú dobu družice zistíme z 3. Kepleroveho zákona

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G M_\oplus}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (9{,}028 \cdot 10^6)^3}{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}} = 8537\,\mathrm{s} = 2{,}37\,\mathrm{h}\,. \tag{1.63}$$

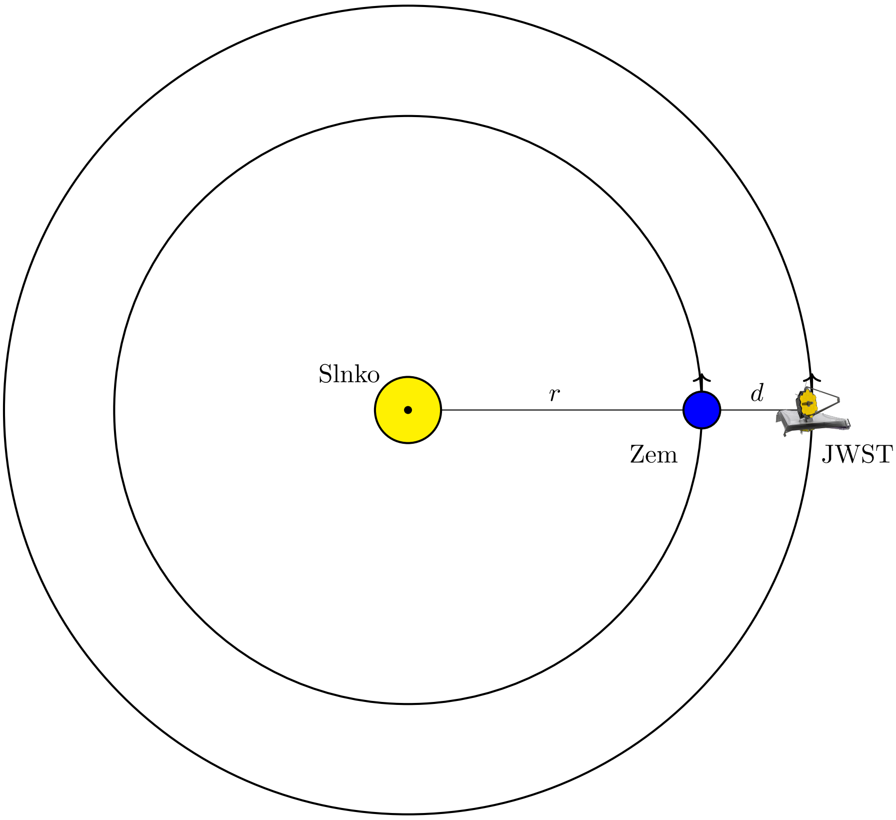
1.3.9 AO 2023, úloha 4 – JWST – riešenie

(a) Lagrangeove body sú významné tým, že ak sa v nich usadí teleso, tak si zachováva voči Zemi a Slnku rovnakú relatívnu polohu. Tieto body rotujú okolo Slnka spolu so Zemou. Bod L2 sa nachádza na polpriamke Slnko → Zem vo vzdialenosti d od Zeme smerom od Slnka (zakreslené na schéme nižšie).

(b) Gravitačné sily vyrátame pomocou Newtonovho gravitačného zákona

$$F_{\mathrm{G}\oplus} = \frac{GmM_\oplus}{d^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6160 \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}{(1{,}5 \cdot 10^9)^2} \doteq 1{,}09\,\mathrm{N}\,, \tag{1.64}$$

$$F_{\mathrm{G}\odot} = \frac{GmM_\odot}{(r+d)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6160 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{(1{,}496 \cdot 10^{11} + 1{,}5 \cdot 10^9)^2} \doteq 35{,}8\,\mathrm{N}\,. \tag{1.65}$$



(c) Použitím výsledkov predchádzajúcej časti určíme pomer síl

$$\frac{F_{\mathrm{G}\odot}}{F_{\mathrm{G}\oplus}} = \frac{35{,}8}{1{,}09} \doteq 32{,}8\,. \tag{1.66}$$

Teda od Slnka pôsobí asi 33-krát väčšia sila ako od Zeme. Celková gravitačná sila F_G je súčtom síl $F_{G\oplus}$ a $F_{G\odot}$, pretože pôsobia v rovnakom smere.

$$F_\mathrm{G} = F_{\mathrm{G}\oplus} + F_{\mathrm{G}\odot} = 1{,}09 + 35{,}8 \doteq 36{,}9\,\mathrm{N}\,. \tag{1.67}$$

(d) Celková gravitačná sila F_g pri pohybe na kruhovej dráhe pôsobí ako dostredivá sila, pre ktorú platí

$$F_G = m\frac{v^2}{r+d}\,, \tag{1.68}$$

kde v je obehová rýchlosť JWST na kruhovej dráhe, ktorú vieme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{r+d}{m}F_G} = \sqrt{\frac{r+d}{m}Gm\left(\frac{M_\oplus}{d^2}+\frac{M_\odot}{(r+d)^2}\right)} = \\ &= \sqrt{(1{,}496\cdot 10^{11}+1{,}5\cdot 10^9)\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{5{,}9736\cdot 10^{24}}{(1{,}5\cdot 10^9)^2}+\frac{1{,}9891\cdot 10^{30}}{(1{,}496\cdot 10^{11}+1{,}5\cdot 10^9)^2}\right)} \doteq \\ &\doteq 30{,}09\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \end{aligned} \tag{1.69}$$

(e) Periódu obehu vyrátame jednoducho ako podiel obvodu kružnice orbity JWST a rýchlosti, ktorou sa pohybuje

$$t = \frac{2\pi(r+d)}{v} = \frac{2\pi\cdot(1{,}496\cdot 10^{11}+1{,}5\cdot 10^9)}{30{,}09\cdot 10^3} \doteq 31{,}55\cdot 10^6\,\mathrm{s} \doteq 365{,}2\,\mathrm{d}\,. \tag{1.70}$$

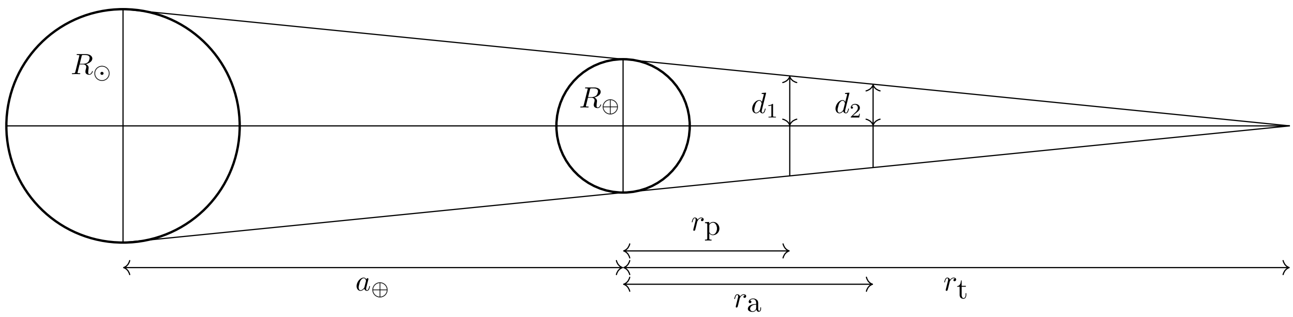
Vidíme, že čas obehu JWST je veľmi podobný jednému roku, čo je perióda obehu Zeme okolo Slnka. Tým sme potvrdili, že si JWST zachováva relatívnu polohu voči Zemi a Slnku.

1.4 Kategória SŠ, finále – riešenia

1.4.1 AO 2007, úloha 2 – riešenie

Potrebujeme vypočítať šírku tieňa Zeme vo vzdialenosti perigea a apogea Mesiaca a rýchlosť Mesiaca v týchto miestach. Využitím podobnosti trojuholníkov na obrázku dostaneme pre pomery ich strán

$$\frac{R_\odot}{a_\oplus + r_t} = \frac{d_1}{r_t - r_p} = \frac{d_2}{r_t - r_a} = \frac{R_\oplus}{r_t} \,. \tag{1.71}$$



Najskôr zistíme, aká je dĺžka tieňa Zeme

$$R_\odot r_t = R_\oplus a_\oplus + R_\oplus r_t \,, \tag{1.72}$$

$$(R_\odot - R_\oplus) r_t = R_\oplus a_\oplus \,, \tag{1.73}$$

$$r_t = \frac{R_\oplus}{R_\odot - R_\oplus} a_\oplus \,. \tag{1.74}$$

Polovica šírky tieňa v perigeu a apogeu je

$$d_1 = \frac{r_t - r_p}{a_\oplus + r_t} R_\odot \,, \tag{1.75}$$

$$d_2 = \frac{r_t - r_a}{a_\oplus + r_t} R_\odot \,. \tag{1.76}$$

Vzorce na výpočet vzdialenosti perigea a apogea sú

$$r_p = a_☾ (1 - e_☾) \,, \tag{1.77}$$

$$r_a = a_☾ (1 + e_☾) \,. \tag{1.78}$$

Číselné hodnoty sú

$$r_t = \frac{6378}{6{,}955 \cdot 10^5 - 6378} \cdot 1{,}496 \cdot 10^8 = 1{,}385 \cdot 10^6\,\mathrm{km} \,, \tag{1.79}$$

$$r_p = 3{,}844 \cdot 10^5 \cdot (1 - 0{,}0549) = 3{,}633 \cdot 10^5\,\mathrm{km} \,, \tag{1.80}$$

$$r_{\rm a} = 3{,}844 \cdot 10^5 \cdot (1 + 0{,}0549) = 4{,}055 \cdot 10^5\,\mathrm{km}\,, \tag{1.81}$$

$$d_1 = \frac{1{,}385 \cdot 10^6 - 3{,}633 \cdot 10^5}{1{,}496 \cdot 10^8 + 1{,}385 \cdot 10^6} \cdot 6{,}955 \cdot 10^5 = 4706\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{1.82}$$

$$d_2 = \frac{1{,}385 \cdot 10^6 - 4{,}055 \cdot 10^5}{1{,}496 \cdot 10^8 + 1{,}385 \cdot 10^6} \cdot 6{,}955 \cdot 10^5 = 4512\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.83}$$

Na výpočet rýchlosti Mesiaca využijeme zákon zachovania hybnosti

$$L_☾ = \text{konštanta} = M_☾ r_{\rm p} v_{\rm p} = M_☾ r_{\rm a} v_{\rm a}\,. \tag{1.84}$$

Ďalej použijeme fakt, že keď sa teleso nachádza vo vzdialenosti veľkej polosi od centra, tak sa pohybuje kruhovou (1. kozmickou rýchlosťou) $v_{\rm k}$

$$v_{\rm k} = \frac{2\pi a_☾}{P_☾}\,, \tag{1.85}$$

$$L_☾ = M_☾ a_☾ \frac{2\pi a_☾}{P_☾}\,. \tag{1.86}$$

Rýchlosť Mesiaca voči Zemi v perigeu a v apogeu je

$$v_{\rm p} = \frac{2\pi a_☾^2}{P_☾ r_{\rm p}} = \frac{2\pi a_☾}{P_☾(1 - e_☾)} = \frac{2\pi \cdot 3{,}844 \cdot 10^5}{27{,}3217 \cdot 86400 \cdot (1 - 0{,}0549)} = 1{,}08\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{1.87}$$

$$v_{\rm a} = \frac{2\pi a_☾}{P_☾(1 + e_☾)} = \frac{2\pi \cdot 3{,}844 \cdot 10^5}{27{,}3217 \cdot 86400 \cdot (1 + 0{,}0549)} = 0{,}97\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.88}$$

Predtým, než vypočítame dĺžku trvania zatmenia si musíme uvedomiť, že rýchlosti Mesiaca, ktoré sme vypočítali sú voči Zemi a nie voči tieňu Zeme. Kvôli obehu Zeme okolo Slnka sa jej tieň pohybuje rovnakou uhlovou rýchlosťou ω akou obieha Zem. Mesiac obieha okolo Zeme prográdne, to znamená, že tieň Zeme sa otáča okolo Zeme v rovnakom zmysle ako Mesiac. Preto Mesiacu trvá prechod zemským tieňom o niečo dlhšie než keby Zem stála na mieste. Rýchlosť Mesiaca voči tieňu Zeme vypočítame tak, že od rýchlosti Mesiaca voči Zemi odčítame rýchlosť tieňa Zeme v danom mieste. Rýchlosti tieňa sú

$$\omega = \frac{2\pi}{365{,}25 \cdot 86400}\,, \tag{1.89}$$

$$v_{\rm tp} = \omega r_{\rm p} = \frac{2\pi \cdot 3{,}633 \cdot 10^5}{365{,}25 \cdot 86400} = 0{,}07\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{1.90}$$

$$v_{\rm ta} = \omega r_{\rm a} = \frac{2\pi \cdot 4{,}055 \cdot 10^5}{365{,}25 \cdot 86400} = 0{,}08\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.91}$$

Mesiac sa teda voči tieňu pohybuje rýchlosťami

$$v_1 = v_{\rm p} - v_{\rm tp} = 1{,}08 - 0{,}07 = 1{,}01\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{1.92}$$

$$v_2 = v_{\rm a} - v_{\rm ta} = 0{,}97 - 0{,}08 = 0{,}89\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.93}$$

Zostáva nám už iba vypočítať čas trvania zatmení. Úplné zatmenie nastane až vo chvíli, kedy je Mesiac celý v tieni Zeme. Počas úplného zatmenia preto Mesiac prejde dráhu rovnú šírke tieňa v danej vzdialenosti mínus 2-krát polomer Mesiaca. Dĺžka trvania zatmení je

$$t_1 = \frac{2d_1 - 2R_☾}{v_1} = \frac{2 \cdot 4706 - 2 \cdot 1737{,}4}{1{,}01} = 5878\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}\ 38\,\mathrm{min}\,, \tag{1.94}$$

$$t_2 = \frac{2d_2 - 2R_☾}{v_2} = \frac{2 \cdot 4512 - 2 \cdot 1737{,}4}{0{,}89} = 6235\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}\ 44\,\mathrm{min}\,. \tag{1.95}$$

Vidíme, že dlhšie trvá úplné zatmenie Mesiaca v apogeu.

1.4.2 AO 2007, úloha 7 – riešenie

Planéta sa pohybuje 1. kozmickou (kruhovou) rýchlosťou

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{30}}{100 \cdot 10^{9}}}\,. \tag{1.96}$$

1.4.3 AO 2008, úloha 2 – Slapové pôsobenie Mesiaca – riešenie

Celková zmena momentu hybnosti sústavy Zem-Mesiac je nulová

$$\Delta L_\oplus + \Delta L_☾ = 0 \tag{1.97}$$

Rotačný moment hybnosti Zeme v súčasnosti je

$$L_{\oplus 2} = I_\oplus \omega_{\oplus 2} = I_\oplus \frac{2\pi}{T} \tag{1.98}$$

T je dĺžka trvania dňa na Zemi a $\omega_{\oplus 2}$ je uhlová rýchlosť rotácie Zeme. Moment hybnosti Zeme pred 3800 rokmi bol

$$L_{\oplus 1} = I_\oplus \omega_{\oplus 1} = I_\oplus \frac{2\pi}{T - \Delta T} \tag{1.99}$$

Moment hybnosti Zeme sa zmenil o hodnotu

$$\Delta L_\oplus = L_{\oplus 2} - L_{\oplus 1} = 2\pi I_\oplus \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T - \Delta T} \right) = 2\pi I_\oplus \frac{-\Delta T}{T(T - \Delta T)} \tag{1.100}$$

Keďže relatívna zmena dĺžky dňa je veľmi malá, $\Delta T \ll T$, približne platí

$$\Delta L_\oplus \approx \frac{-2\pi I_\oplus \Delta T}{T^2} = \frac{-2\pi \cdot 0{,}33 M_\oplus R_\oplus^2 \Delta T}{T^2} \tag{1.101}$$

Orbitálny moment hybnosti Mesiaca v súčasnosti a v minulosti je

$$L_{☾ 2} = M_☾ a_☾ v_☾ = M_☾ a_☾ \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_☾}} = M_☾ \sqrt{GM_\oplus a_☾} \tag{1.102}$$

$$L_{☾1} = M_{☾}\sqrt{GM_{\oplus}(a_{☾} - \Delta a_{☾})} \tag{1.103}$$

Moment hybnosti Mesiaca sa zmenil o

$$\Delta L_{☾} = L_{☾2} - L_{☾1} = M_{☾}\sqrt{GM_{\oplus}}(\sqrt{a_{☾}} - \sqrt{a_{☾} - \Delta a_{☾}}) \tag{1.104}$$

$$\Delta L_{☾} = M_{☾}\sqrt{GM_{\oplus}}\left(\sqrt{a_{☾}} - \sqrt{a_{☾}}\sqrt{\frac{a_{☾} - \Delta a_{☾}}{a_{☾}}}\right) \tag{1.105}$$

Relatívna zmena vzdialenosti Mesiaca od Zeme bude tiež malá, $\Delta a_{☾} \ll a_{☾}$, využijeme preto približný vzťah, ktorý platí pre $x \ll 1$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \tag{1.106}$$

Dostaneme približnú hodnotu zmenu momentu hybnosti Mesiaca

$$\Delta L_{☾} \approx M_{☾}\sqrt{GM_{\oplus}a_{☾}}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta a_{☾}}{a_{☾}}\right)\right] = M_{☾}\sqrt{GM_{\oplus}a_{☾}}\frac{1}{2}\frac{\Delta a_{☾}}{a_{☾}} \tag{1.107}$$

Porovnaním zmien momentu hybnosti dostaneme vzťah pre zmenu vzdialenosti Mesiaca od Zeme

$$\Delta L_{☾} = -\Delta L_{\oplus} \tag{1.108}$$

$$\frac{-2\pi \cdot 0{,}33 M_{\oplus} R_{\oplus}^2 \Delta T}{T^2} = \frac{1}{2} M_{☾}\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a_{☾}}}\Delta a_{☾} \tag{1.109}$$

$$\Delta a_{☾} = \frac{4\pi \cdot 0{,}33 R_{\oplus}^2 \Delta T \sqrt{M_{\oplus} a_{☾}}}{\sqrt{G} M_{☾} T^2} \tag{1.110}$$

$$\Delta a_{☾} = \frac{4\pi \cdot 0{,}33 \cdot (6{,}378 \cdot 10^6)^2 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{5{,}9736 \cdot 10^{24} \cdot 3{,}844 \cdot 10^8}}{\sqrt{6{,}673 \cdot 10^{-11}} \cdot 7{,}4377 \cdot 10^{22} \cdot 86400^2} \tag{1.111}$$

$$\Delta a_{☾} = 178\,\mathrm{m} \tag{1.112}$$

1.4.4 AO 2009, úloha 1 – Umelá družica Zeme – riešenie

Najskôr vypočítame veľkú polos dráhy družice

$$a = \frac{(h_1 + R_{\oplus}) + (h_2 + R_{\oplus})}{2} = \frac{5000 + 300 + 2 \cdot 6378}{2} = 9028\,\mathrm{km} = 9{,}028 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\,. \tag{1.113}$$

Obežnú dobu družice zistíme z 3. Keplerovho zákona

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (9{,}028 \cdot 10^6)^3}{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}} = 8537\,\mathrm{s} = 2{,}37\,\mathrm{h}\,. \tag{1.114}$$

Väčšinu konštánt v zadaní nebolo potrebné použiť.

1.4.5 AO 2009, úloha 4 – Dvojitý asteroid – riešenie

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}} = \frac{4\pi^2 \cdot 1}{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot (5+5)} = 243\,200\,\mathrm{s} = 2{,}82\,\text{dní}\,. \tag{1.115}$$

1.4.6 AO 2010, úloha 1 – riešenie

Astronaut sa pohybuje 1. kozmickou rýchlosťou

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,. \tag{1.116}$$

Hmotnosť asteroidu je

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\,, \tag{1.117}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{4\pi G\rho R^2}{3}}\,, \tag{1.118}$$

$$R = \sqrt{\frac{3v_k^2}{4\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^2}{4\pi \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5500}} = 8070\,\mathrm{m} = 8{,}07\,\mathrm{km}\,. \tag{1.119}$$

1.4.7 AO 2010, úloha 2 – riešenie

Najskôr vypočítame veľkú polos systému

$$a = \sqrt[3]{\frac{G(M_1 + M_2)P^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 12 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot (10 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} = 3{,}11 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}\,. \tag{1.120}$$

Pomer hmotností jednotlivých zložiek sa rovná prevrátenému pomeru ich polomerov dráh

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a - a_2}\,. \tag{1.121}$$

Z toho zistíme polomer dráhy pulzaru

$$a_2 = \frac{M_1}{M_2}a - \frac{M_1}{M_2}a_2\,, \tag{1.122}$$

$$M_2 a_2 = M_1 a - M_1 a_2\,, \tag{1.123}$$

$$a_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}a = \frac{10}{12} \cdot 3{,}11 \cdot 10^1 0 = 2{,}59 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}\,. \tag{1.124}$$

Rýchlosť obehu pulzaru je

$$v_\mathrm{k} = \frac{2\pi a_2}{P} = \frac{2\pi \cdot 2{,}59 \cdot 10^{10}}{10 \cdot 86400} = 188\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.125}$$

Ku zmene periódy pulzácií dochádza kvôli Dopplerovmu javu, ktorý platí nielen pre svetlo, ale pre všetky iné periodické signály. Medzi vlnovou dĺžkou, rýchlosťou a frekvenciou signálu platí vzťah

$$\lambda = \frac{c}{f} \,. \tag{1.126}$$

Zároveň perióda signálu je prevrátenou hodnotou frekvencie

$$f = \frac{1}{T} \,, \tag{1.127}$$

$$\lambda = cT \,. \tag{1.128}$$

Dopplerov vzťah pre vlnové dĺžky tak môžeme prepísať na Dopplerov vzťah pre periódy signálu, v tomto prípade sa jedná o periódy pulzaru

$$\frac{v_\mathrm{k}}{c} = z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T_0} \,. \tag{1.129}$$

Sklon dvojhviezdy je 90°, preto môžeme v_k použiť vo vzorci pre Dopplerov jav. Ak by bol sklon dráhy iný, museli by sme použiť priemet rýchlosti $v_\mathrm{k} \sin i$.
Zmena periódy je maximálne

$$\Delta T = \frac{v_\mathrm{k}}{c} T_0 = \frac{188 \cdot 10^3}{2{,}9979 \cdot 10^8} \cdot 0{,}1 = 6{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} = 63\,\mathrm{\mu s} \,. \tag{1.130}$$

Periódu pulzácií teda pozorujeme v intervale $0{,}1\,\mathrm{s} \pm 63\,\mathrm{\mu s}$.

1.4.8 AO 2014, úloha 5 – Dvojhviezda – riešenie

Ak dosadíme hmotnosti v jednotkách hmotnosti Slnka a periódu v rokoch, potom veľká polos v au je

$$a = \sqrt[3]{P^2(M_1 + M_2)} = \sqrt[3]{27^2 \cdot 8} = 18\,\mathrm{au} \,. \tag{1.131}$$

Veľkú polos vidíme pod malým uhlom, preto môžeme použiť približný vzťah

$$\frac{a}{d} \approx \alpha \,. \tag{1.132}$$

Ak dosadíme a v au a α v uhlových sekundách, dostaneme vzdialenosť v parsekoch (vyplýva to z definície parseku)

$$d = \frac{a}{\alpha} = \frac{18}{0{,}45} = 40\,\mathrm{pc} \,. \tag{1.133}$$

1.4.9 AO 2015, úloha 5 – riešenie

Astronaut sa môže pohybovať maximálne 1. kozmickou rýchlosťou, inak sa neudrží na povrchu asteroidu. Rýchlosť, ktorou by musel kráčať, aby obišiel asteroid za 2,2 hodiny je

$$v_\mathrm{a} = \frac{2\pi R}{t} = \frac{2\pi \cdot 2200}{2{,}2 \cdot 3600} = 1{,}75\,\mathrm{m\,s^{-1}} \,. \tag{1.134}$$

1. kozmická rýchlosť je

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho R^2} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2{,}2 \cdot 100^3}{1000} \cdot 2200^2} = 1{,}72\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{1.135}$$

Astronaut to nemôže dokázať, lebo $v_\mathrm{a} > v_\mathrm{k}$, takže by sa neudržal na povrchu.

1.4.10 AO 2015, úloha 6 – riešenie

Na riešenie využijeme zákon zachovania momentu hybnosti (mechanická energia Zeme sa v tomto prípade nezachováva, pretože sa mení hmotnosť Slnka). Na začiatku je hmotnosť Slnka $M_\odot$, vzdialenosť Zeme od Slnka r_1 a moment hybnosti Zeme

$$L_1 = M_\oplus r_1 v_1 = M_\oplus r_1 \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}} = M_\oplus \sqrt{GM_\odot r_1}\,. \tag{1.136}$$

Na konci sme využili vzorec pre kruhovú rýchlosť. Po 100 rokoch sa hmotnosť Slnka zníži na $M_\odot - \Delta m$, zníži sa gravitačná sila Slnka pôsobiaca na Zem a Zem bude obiehať vo väčšej vzdialenosti $r_2 = r_1 + \Delta r$. Moment hybnosti Zeme bude

$$L_2 = M_\oplus r_2 v_2 = M_\oplus (r_1 + \Delta r)\sqrt{\frac{G(M_\odot - \Delta m)}{r_1 + \Delta r}} = M_\oplus \sqrt{G(M_\odot - \Delta m)(r_1 + \Delta r)}\,. \tag{1.137}$$

Z rovnosti momentov hybnosti $L_1 = L_2$ dostaneme

$$\sqrt{M_\odot r_1} = \sqrt{(M_\odot - \Delta m)(r_1 + \Delta r)}\,. \tag{1.138}$$

Energia jadrových reakcií je Slnkom vyžiarená do okolia a pre zmenu hmotnosti Slnka platí

$$\Delta m = \frac{L_\odot t}{c^2} = \frac{3{,}826 \cdot 10^{26} \cdot 100 \cdot 365{,}25 \cdot 86400}{(2{,}9979 \cdot 10^8)^2} = 1{,}34 \cdot 10^{19}\,\mathrm{kg}\,. \tag{1.139}$$

Zmena hmotnosti Slnka je veľmi malá v porovnaní s hmotnosťou Slnka $\Delta m \ll M_\odot$, preto môžeme očakávať, že aj zmena polomeru dráhy Zeme bude veľmi malá $\Delta r \ll r_1$. Rovnosť vyplývajúcu zo zákona zachovania hybnosti upravíme tak, aby na jednej strane bola hmotnosť Slnka a jej zmena a na druhej strane polomer dráhy Zeme a jeho zmena

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{M_\odot - \Delta m}{M_\odot}}} = \sqrt{\frac{r_1 + \Delta r}{r_1}}\,, \tag{1.140}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta m}{M_\odot}}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta r}{r_1}}\,. \tag{1.141}$$

Ďalej využijeme približné vzorce, ktoré platia pre $x \ll 1$, kde x je v našom prípade pomer zmeny veličiny a veličiny samotnej

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx\,, \tag{1.142}$$

$$(1-x)^{-n} \approx 1 + nx\,, \tag{1.143}$$

$$1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{M_\odot} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta r}{r_1}\,, \tag{1.144}$$

$$\frac{\Delta m}{M_\odot} = \frac{\Delta r}{r_1}\,. \tag{1.145}$$

Polomer Zemskej dráhy sa zväčší o

$$\Delta r = \frac{\Delta m}{M_\odot} r_1 = \frac{1{,}34 \cdot 10^{19}}{1{,}9891 \cdot 10^{30}} \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} = 1\,\mathrm{m}\,. \tag{1.146}$$

1.4.11 AO 2016, úloha 5 – riešenie

Tlak žiarenia je spôsobený prenosom hybnosti fotónov na zrnko prachu. Fotón s energiou E má hybnosť

$$p = \frac{E}{c}\,. \tag{1.147}$$

Podľa 2. Newtonovho zákonu sa sila rovná zmene hybnosti za čas. Pre tlakovú silu žiarenia potom platí

$$F_\mathrm{p} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{c\Delta t}\,. \tag{1.148}$$

Na zrnko prachu dopadá tok žiarenia od Slnka

$$F = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}\,. \tag{1.149}$$

Celková energia, ktorá dopadne na zrnko s polomerom R za 1 sekundu je

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = FS = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}\pi R^2\,. \tag{1.150}$$

Dosadíme to do vzorca pre silu a dostaneme celkovú silu na zrnko spôsobenú tlakom žiarenia

$$F_\mathrm{p} = \frac{L_\odot \pi R^2}{4\pi r^2 c}\,. \tag{1.151}$$

Gravitačná sila pôsobiaca na prachové zrnko je

$$F_\mathrm{g} = \frac{GM_\odot m}{r^2} = \frac{4\pi G\rho M_\odot R^3}{3r^2}\,. \tag{1.152}$$

Gravitačná a tlaková sila sú v rovnováhe

$$F_\mathrm{p} = F_\mathrm{g}\,, \tag{1.153}$$

$$\frac{L_\odot R^2}{4r^2 c} = \frac{4\pi G\rho M_\odot R^3}{3r^2}\,. \tag{1.154}$$

Z rovnosti vyjadríme polomer zrnka

$$R = \frac{3L_\odot}{16\pi G\rho M_\odot c}\,. \tag{1.155}$$

V zadaní sa nás pýtajú na priemer zrnka, ktorý je

$$D = 2R = \frac{3L_\odot}{8\pi G\rho M_\odot c}\,. \tag{1.156}$$

$$D = \frac{3 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}}{8\pi 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 10^3 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8} = 1{,}15 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = 1{,}15\,\mathrm{\mu m}\,. \tag{1.157}$$

1.4.12 AO 2019, úloha 3 – Rotačné krivky galaxií – riešenie

(a) Hviezdy obiehajú okolo centra galaxie po kruhových dráhach rýchlosťou

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}\,. \tag{1.158}$$

Rotačná krivka je závislosť veľkosti kruhovej rýchlosti na vzdialenosti od stredu galaxie. Na hviezdu obiehajúcu vo vzdialenosti r pôsobí podľa Gaussovho zákona (vďaka sférickej symetrii galaxie) iba hmota, ktorá sa nachádza bližšie ku stredu galaxie. Hmotnosť $M(r)$ vnútri polomeru r si vyjadríme pre dva prípady

$$M(r) = M_0 + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \qquad \text{pre } 0 < \mathrm{r} \leqslant \mathrm{r}_0\,, \tag{1.159}$$

$$M(r) = M_0 + \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0 \qquad \text{pre } \mathrm{r} > \mathrm{r}_0\,. \tag{1.160}$$

Dosadíme do vzorca pre kruhovú rýchlosť

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_0}{r} + \frac{4}{3}\pi G r^2 \rho_0} \qquad \text{pre } 0 < \mathrm{r} \leqslant \mathrm{r}_0\,, \tag{1.161}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{G}{r}\left(M_0 + \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0\right)} \qquad \text{pre } \mathrm{r} > \mathrm{r}_0\,. \tag{1.162}$$

Hmotnosť galaxie obsiahnutá v polomere r_0 je

$$M_{\text{galaxy}} = 8 \cdot 10^7 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} + \frac{4}{3}\pi \cdot 5000^3 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}\,, \tag{1.163}$$

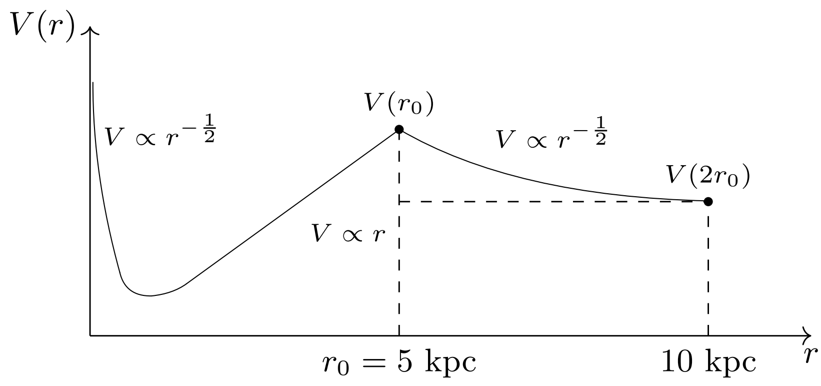
$$M_{\text{galaxy}} = 2{,}08 \cdot 10^{41}\,\text{kg} = 1{,}05 \cdot 10^{11}\,M_\odot\,. \tag{1.164}$$

Rotačná rýchlosť vo vzdialenostiach r_0 a $2r_0$ je

$$v(r_0) = \sqrt{\frac{GM_{\text{galaxy}}}{r_0}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}08 \cdot 10^{41}}{5 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{19}}} = 300\,\text{km}\,\text{s}^{-1}\,, \tag{1.165}$$

$$v(2r_0) = \sqrt{\frac{GM_{\text{galaxy}}}{2r_0}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}08 \cdot 10^{41}}{10 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{19}}} = 212\,\text{km}\,\text{s}^{-1}\,. \tag{1.166}$$

Pri náčrte grafu krivky rotačnej rýchlosti si musíme uvedomiť, ako sa funkcia $v(r)$ správa v určitých významných oblastiach. Pre malé r blízke 0 je člen $\frac{GM_0}{r}$ oveľa väčší ako člen $\frac{4}{3}\pi G r^2 \rho_0$, funkcia $v(r)$ v tejto oblasti klesá ako $v \sim r^{-1/2}$. Keď sa r približuje zdola ku r_0, tak naopak prevláda člen $\frac{4}{3}\pi G r^2 \rho_0$ a rotačná rýchlosť rastie ako $v \sim r$. Vo vzdialenostiach nad r_0 je rýchlosť opäť úmerná $v \sim r^{-1/2}$. Funkcia $v(r)$ nadobúda lokálne maximum práve na okraji hala v $r = r_0$. Rotačná krivka je načrtnutá na obrázku.



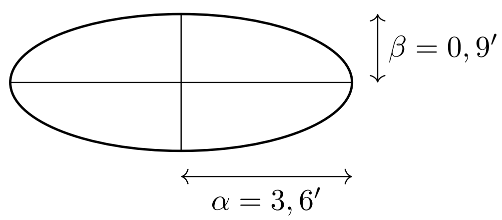
(b) Na obrázku odmeriame dlhšiu os galaxie, je to zhruba 7,2′, uhlový polomer galaxie je teda $\alpha = 3{,}6' = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$ rad. Polomer galaxie je

$$r_\mathrm{g} = \alpha d = 1{,}05 \cdot 10^{-3} \cdot 10\,700 = 11{,}2\,\mathrm{kpc}\,. \tag{1.167}$$

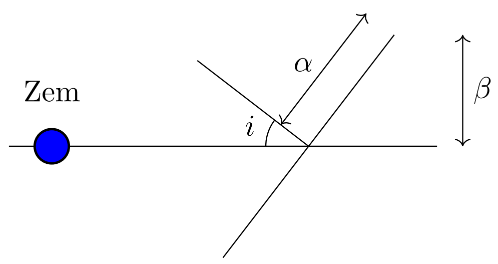
Maximálnu a minimálnu pozorovanú vlnovú dĺžku vypočítame z maximálnej a minimálnej pozorovanej radiálnej rýchlosti. Galaxiu na obrázku vidíme ako elipsu, čo znamená, že sa na jej disk nepozeráme presne zboku, ale pod nejakým sklonom i. Vďaka červenému posunu dokážeme merať iba radiálnu zložku rotačnej rýchlosti, teda jej priemet $v_\mathrm{rot} \sin i$. Sklon galaxie vieme vypočítať, ak si na obrázku odmeriame aj rozmer malej polosi galaxie. To je zhruba $\beta = 0{,}9'$. Sklon je potom

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{0{,}9}{3{,}6}\,, \tag{1.168}$$

$$i = 75^\circ\,. \tag{1.169}$$



Pohľad zpredu



Pohľad zboku

Hraničné hodnoty pozorovanej radiálnej rýchlosti sú

$$v_\mathrm{max} = v_\mathrm{rad} + v_\mathrm{rot}(r_0) \sin i = 807 + 300 \cdot \sin 75^\circ = 1097\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{1.170}$$

$$v_\mathrm{min} = v_\mathrm{rad} - v_\mathrm{rot}(r_0) \sin i = 807 - 300 \cdot \sin 75^\circ = 517\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.171}$$

Najvyššiu a najnižšiu vlnovú dĺžku získame zo vzorca pre červený posun

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}\,, \tag{1.172}$$

$$\lambda_{\max} = \left(\frac{v_{\max}}{c} + 1\right)\lambda_0 = \left(\frac{1097}{2{,}9979 \cdot 10^5} + 1\right) \cdot 656{,}28 = 658{,}68\,\mathrm{nm}\,, \tag{1.173}$$

$$\lambda_{\min} = \left(\frac{v_{\min}}{c} + 1\right)\lambda_0 = \left(\frac{517}{2{,}9979 \cdot 10^5} + 1\right) \cdot 656{,}28 = 657{,}41\,\mathrm{nm}\,. \tag{1.174}$$

(c) Hmotnosť sférického oblaku tmavej hmoty s polomerom r dosadíme do vzorca pre kruhovú rýchlosť

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 k r^n\,, \tag{1.175}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G k}{3} r^{2+n}}\,. \tag{1.176}$$

Aby bola krivka radiálnej rýchlosti plochá, v nemôže závisieť na r, teda musí platiť

$$2 + n = 0\,. \tag{1.177}$$

Z toho máme $n = -2$.

(d) Pri úprave vzorca pre q využijeme nasledujúcu aproximáciu platnú pre $x \ll 1$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx\,, \tag{1.178}$$

$$q = \left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\,, \tag{1.179}$$

$$q = \left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]^{-1/2}\left[1 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^2\right]^{-1/2}\,, \tag{1.180}$$

$$q \approx \frac{a}{a_0}\left(1 + \frac{2a}{a_0}\right)^{-1/2}\,, \tag{1.181}$$

$$q \approx \frac{a}{a_0}\left(1 - \frac{a}{a_0}\right)\,, \tag{1.182}$$

$$q \approx \frac{a}{a_0}\,. \tag{1.183}$$

Pre silu naozaj približne platí

$$F = qma \approx m\frac{a^2}{a_0}\,. \tag{1.184}$$

Táto sila sa rovná gravitačnej

$$F = F_{\mathrm{g}} = \frac{GMm}{r^2} = m\frac{a^2}{a_0}\,. \tag{1.185}$$

Za a dosadíme dostredivé zrýchlenie

$$a = \frac{v^2}{r}\,, \tag{1.186}$$

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^4}{a_0 r^2}\,. \tag{1.187}$$

Zrýchlenie a_0 je

$$a_0 = \frac{v^4}{GM} = \frac{(150 \cdot 10^3)^4}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}} = 3{,}82 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,. \tag{1.188}$$

1.4.13 AO 2021, úloha 4 – Gravitačný kolaps a čierne diery – riešenie

(a) Kruhová rýchlosť je

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{50 \cdot 10^{9}}} = 51{,}5\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.189}$$

Na to, aby loď začala radiálne padať na hviezdu, musí impulz sily pôsobiť proti smeru jej obežného pohybu a znížiť jej rýchlosť na nulu

$$\Delta p = mv = 100 \cdot 10^{3} \cdot 51{,}5 \cdot 10^{3} = 5{,}15 \cdot 10^{9}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}\,. \tag{1.190}$$

(b) Ku radiálnemu pádu dochádza kvôli pôsobeniu gravitačnej sily, trvanie pádu môže preto závisieť iba na gravitačnej konštante G, hmotnosti hviezdy M a počiatočnej vzdialenosti lodi od hviezdy a. Tieto veličiny musia byť vo vzorci na výpočet času skombinované tak, aby kombinácia ich fyzikálnych jednotiek mala rozmer času (teda sekundy). Jednotky spomínaných veličín sú

$$[t] = 1\,\mathrm{s}\,, \tag{1.191}$$

$$[G] = 1\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\,, \tag{1.192}$$

$$[M] = 1\,\mathrm{kg}\,, \tag{1.193}$$

$$[a] = 1\,\mathrm{m}\,. \tag{1.194}$$

Vzorec pre čas voľného pádu hľadáme v tvare

$$t = KG^{\alpha}M^{\beta}a^{\gamma}\,. \tag{1.195}$$

Pre mocniny platí nasledujúca sústava rovníc

$$\mathrm{s}:\ 1 = -2\alpha\,, \tag{1.196}$$

$$\mathrm{kg}:\ 0 = -\alpha + \beta\,, \tag{1.197}$$

$$\mathrm{m}:\ 0 = 3\alpha + \gamma\,. \tag{1.198}$$

Riešením sú hodnoty $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$, takže vzorec pre čas má tvar

$$t = K\sqrt{\frac{a^3}{GM}}\,. \tag{1.199}$$

Vzorec pre čas sa dá získať aj pomocou nasledujúcej úvahy: predstavme si priamku po ktorej teleso padá do gravitačného centra. Priamka zodpovedá extrémne sploštenej Keplerovskej elipse s veľkou polosou rovnou polovici pôvodnej vzdialenosti od centra: $a/2 = 25 \cdot 10^{6}\,\mathrm{km}$. Pád bude zodpovedať času prechodu z afélia do perihélia (limitne zhodného s gravitačným centrom), teda polovici štandardnej Keplerovskej periódy, $t = P/2$.

$$P^2 = \frac{4\pi^2(a/2)^3}{GM} = \frac{4\pi^2a^3}{8GM}\ , \tag{1.200}$$

$$P^2 = (2t)^2 = 4t^2\ , \tag{1.201}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2a^3}{8GM}}\,. \tag{1.202}$$

(c) Dosadíme hodnoty pre Slnko

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot (6{,}955 \cdot 10^8)^3}{8 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}} = 1770\,\mathrm{s} = 29{,}5\,\mathrm{min}\,. \tag{1.203}$$

Aproximácie/nezrovnalosti:

- odvodili sme to pre pád hmotného bodu na hmotný bod, nie pre kolaps približne sféricky symetrického rozloženia hmoty v hviezde,
- v odvodení vystupuje iba gravitácia, v kolabujúcej hviezde bude proti gravitačnej sile pôsobiť tlak a spomaľovať pád (plyn, žiarenie, degenerovaný plyn),
- odvodili sme to cez Keplerove zákony/Newtonovskú mechaniku, no pri kolapse na čiernu dieru sa hviezda nutne dostane do silne relativistického režimu.

(d) Vzorec pre gravitačný červený posun sa dá odvodiť na základe zjednodušenej (aj keď fyzikálne nesprávnej) predstavy. Využije sa pri tom zachovanie energie fotónu v mieste vyžiarenia a v nekonečne

$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{GMm}{r} = \frac{hc}{\lambda_\infty}\,. \tag{1.204}$$

Namiesto hmotnosti fotónu dosadíme

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}\,, \tag{1.205}$$

$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{GMhc}{r\lambda_0 c^2} = \frac{hc}{\lambda_\infty}\,, \tag{1.206}$$

$$\lambda_\infty \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) = \lambda_0\,. \tag{1.207}$$

Červený posun v nekonečne je

$$z = \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{GM}{rc^2}} - 1 = \frac{\frac{GM}{rc^2}}{1 - \frac{GM}{rc^2}}\,. \tag{1.208}$$

V prípade, že je fotón vyžiarený ďaleko od čiernej diery (čo je v našom prípade splnené), je možné v menovateli zanedbať člen $\frac{GM}{rc^2}$ a dostaneme

$$z = \frac{GM}{rc^2}\,. \tag{1.209}$$

Hmotnosť čiernej diery s daným Schwarzschildovým polomerom je

$$M = \frac{R_\mathrm{s} c^2}{2G} = \frac{1 \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^2}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6{,}74 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}\,. \tag{1.210}$$

Červený posun v nekonečne je v tomto prípade

$$z = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}74 \cdot 10^{26}}{10^9 \cdot (2{,}9979)^2} = 5 \cdot 10^{-10}\,. \tag{1.211}$$

Dostali sme závislosť $z \sim \frac{1}{r}$, tá ale platí pre $\frac{GM}{rc^2} \ll 1$, čo je predpoklad, ktorý sme využili pri jej odvodení. Bližšie ku čiernej diere je závislosť $z(r)$ komplikovanejšia. Ak by bol fotón vyžiarený na horizonte, jeho červený posun v nekonečne by bol $z = \infty$. Graf závislosti z na r teda nebude obyčajná hyperbola, ale bude to klesajúca funkcia, ktorá v $r = R_\mathrm{s}$ diverguje a pre veľké r sa bude správať ako klasická hyperbola.

1.4.14 AO 2022, úloha 2 – Tmavé Slnko – riešenie

(a) Na kruhovej dráhe musí platiť rovnosť gravitačnej sily F_g a odstredivej sily F_o. Zadanie nám napovedá dôležitú vec: na objekt vnútri tmavého Slnka ($r < R_\odot$) pôsobí gravitácia ekvivalentná gravitácii hmoty uloženej vo sfére pod objektom, teda gravitácia gule s polomerom r. Preto

$$F_\mathrm{g} = \frac{GmM(r)}{r^2} = \frac{GmM_\odot \frac{r}{R_\odot}}{r^2} = \frac{GmM_\odot}{rR_\odot}\,, \tag{1.212}$$

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}\,. \tag{1.213}$$

Z rovnosti gravitačnej a odstredivej sily dostávame vyjadrenie pre rýchlosť v

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{o}\,, \tag{1.214}$$

$$\frac{GmM_\odot}{rR_\odot} = \frac{mv^2}{r}\,, \tag{1.215}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\odot}} = \sqrt{\frac{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9891\cdot 10^{30}}{6{,}955\cdot 10^{8}}} = 4{,}37\cdot 10^{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 437\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.216}$$

Všimnime si, že táto rýchlosť nie je závislá na vzdialenosti r. Toto bude dôležité neskôr.

(b) Perióda obehu je čas za ktorý sonda prejde kruhovú dráhu o dĺžke $2\pi r$, kde $r = R_\odot/2$

$$T = \frac{\pi R_\odot}{v} = \frac{\pi R_\odot}{\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\odot}}} = \pi\sqrt{\frac{R_\odot^3}{GM_\odot}} = \pi\cdot\sqrt{\frac{(6{,}955\cdot 10^8)^3}{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9891\cdot 10^{30}}} = 5003\,\mathrm{s} = 1{,}39\,\mathrm{h}\,. \tag{1.217}$$

(c) V zadaní (a) sme vraveli, že platí rovnosť gravitačnej a odstredivej sily. To znamená, že výslednica síl pôsobiaca na sondu (a človeka v nej) je nulová. No a keďže je nulová sila, tak aj zrýchlenie

$$a = 0\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,. \tag{1.218}$$

Je to obdobná situácia ako na medzinárodnej vesmírnej stanici – na sonde panuje stav beztiaže. A ten (ako je všeobecne známe) ľudia prežiť vedia.

(d) Sonda si udržiava konštantnú rýchlosť v_R v radiálnom smere. K povrchu potrebuje precestovať vzdialenosť $R_\odot/2$, čo jej bude trvať čas

$$t = \frac{R_\odot/2}{v_\mathrm{R}} = \frac{R_\odot}{2v_\mathrm{R}} = \frac{6{,}955\cdot 10^5}{2\cdot 1} = 348\,000\,\mathrm{s} = 4{,}03\,\mathrm{dňa}\,. \tag{1.219}$$

(e) V (a) sme zistili, že obehová, respektíve tangenciálna, rýchlosť sondy je konštantná. To znamená, že na povrchu bude stále rovná $v = 437\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. V radiálnom smere motory zabezpečujú konštantnú rýchlosť $v_\mathrm{R} = 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Výsledná rýchlosť v_p je zložením v a v_R podľa Pytagorovej vety (keďže rýchlosti sú na seba kolmé). Avšak vidíme, že $v \gg v_\mathrm{R}$, a preto v rámci presnosti na 3 platné číslice

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{v^2 + v_\mathrm{R}^2} \approx v = 437\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{1.220}$$

(f) Keďže už ďalej nepôsobia motory, tak môžeme využiť zákon zachovania energie (takisto by sme to vedeli rátať pomocou zákonu zachovania momentu hybnosti). Energia sondy na povrchu musí byť rovná energii sondy v jej najvyššom bode dráhy nad tmavým Slnkom. Dôležité je si uvedomiť, že počas pohybu sondy nad povrchom sa nemení tangenciálna zložka (keďže v tomto smere nepôsobí gravitačná sila). Preto rýchlosť sondy vo výške h nad povrchom je rovná v. Rýchlosť na povrchu v_p sme už zrátali (treba si dať pozor, že v tomto prípade nemôžeme aproximovať $v_\mathrm{p} \approx v$, keďže by sme dostali $h = 0$). Zákon zachovania energie nám hovorí

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \frac{GmM_\odot}{R_\odot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_\odot}{R_\odot + h}\,. \tag{1.221}$$

Po dosadení $v_\mathrm{p}^2 = v^2 + v_\mathrm{R}^2$ a úprave získame h.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}v_\mathrm{R}^2 - \frac{GM_\odot}{R_\odot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\odot}{R_\odot + h}\,, \tag{1.222}$$

$$\frac{v_\mathrm{R}^2 R_\odot - 2GM_\odot}{2R_\odot} = -\frac{GM_\odot}{R_\odot + h}\,, \tag{1.223}$$

$$R_\odot + h = \frac{2GM_\odot R_\odot}{2GM_\odot - v_\mathrm{R}^2 R_\odot}\,, \tag{1.224}$$

$$h = \frac{2GM_\odot}{2GM_\odot/R_\odot - v_\mathrm{R}^2} - R_\odot\,. \tag{1.225}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame výsledok

$$h = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}/6{,}955 \cdot 10^{8} - 1000^2 \cdot} - 6{,}955 \cdot 10^8 = 1{,}82\,\mathrm{km}\,. \tag{1.226}$$

Poznámka:

Všeobecné vyjadrenia môžeme skrášliť využitím aproximácie $v \gg v_\mathrm{R}$, keďže $437\,\mathrm{km\,s^{-1}} \gg 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Ak si spomenieme na vyjadrenie $v = \sqrt{GM_\odot/R_\odot}$ z (a), tak

$$v^2 = \frac{GM_\odot}{R_\odot} \gg v_\mathrm{R}^2\,. \tag{1.227}$$

Nemôžeme však len hneď zjednodušiť menovateľ rovnice (1.225) ako

$$\frac{2GM_\odot}{R_\odot} - v_\mathrm{R}^2 \approx \frac{2GM_\odot}{R_\odot}\,, \tag{1.228}$$

pretože by to bola príliš veľká aproximácia a dostali by sme

$$h \approx \frac{2GM_\odot}{2GM_\odot/R_\odot} - R_\odot = R_\odot - R_\odot = 0\,, \tag{1.229}$$

teda nulovú výšku.

Namiesto toho dáme najskôr v rovnici (1.225) dokopy zlomok a mínus $R_\odot$ a potom aproximujeme.

$$h = \frac{2GM_\odot}{2GM_\odot/R_\odot - v_\mathrm{R}^2} - R_\odot = \frac{2GM_\odot - \left(2GM_\odot/R_\odot - v_\mathrm{R}^2\right) R_\odot}{2GM_\odot/R_\odot - v_\mathrm{R}^2} = \tag{1.230}$$

$$= \frac{2GM_\odot - 2GM_\odot + v_\mathrm{R}^2 R_\odot}{2GM_\odot/R_\odot - v_\mathrm{R}^2} = \frac{v_\mathrm{R}^2 R_\odot}{2GM_\odot/R_\odot - v_\mathrm{R}^2} \approx \frac{v_\mathrm{R}^2 R_\odot}{2GM_\odot/R_\odot} = \frac{v_\mathrm{R}^2 R_\odot^2}{2GM_\odot}\,. \tag{1.231}$$

Výsledok sa líši o $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, čo je mimo presnosti na 3 platné cifry.

(g) Ako pomôcka napovedá, všimnime si že výška $h \ll R$, teda sonda vyletí nad povrch iba nepatrne a takmer okamžite sa ponorí naspäť do tmavého Slnka. To znamená, že gravitačnú silu môžeme aproximovať ako konštantnú, pretože z pohľadu sondy blízko povrchu sa tmavé Slnko javí ako nekonečná rovina (obdobne sa nám na povrchu Zeme (a tesne nad ním) javí, že sme v homogénnom gravitačnom poli). Počas pohybu sondy sa nezmení tangenciálna zložka rýchlosti, a preto stačí vyšetriť pohyb v radiálnom smere.

No a to nie je nič iné ako zvislý vrh so zrýchlením $a = F_\mathrm{g}/m$

$$h = \frac{1}{2}a\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{F_\mathrm{g}}{m}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{GM_\odot}{R_\odot^2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\,. \tag{1.232}$$

Vyjadríme Δt a dopočítame (využijeme hodnotu výšky h z (f))

$$\Delta t = 2R_\odot\sqrt{\frac{2h}{GM_\odot}} = 2\cdot 6{,}955\cdot 10^8\sqrt{\frac{2\cdot 1820}{6{,}674\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}989\cdot 10^{30}}} = 7{,}28\,\mathrm{s}\,. \tag{1.233}$$

Poznámka:

Využitím vzťahu pre h odvodeného v minulej poznámke vieme approximovať (1.233) ako

$$\Delta t = 2R_\odot\sqrt{\frac{2h}{GM_\odot}} \approx \Delta t = 2R_\odot\sqrt{\frac{2\frac{v_\mathrm{R}^2 R_\odot^2}{2GM_\odot}}{GM_\odot}} = \Delta t = 2R_\odot\sqrt{\frac{v_\mathrm{R}^2 R_\odot^2}{G^2M_\odot^2}} = \Delta t = 2\frac{v_\mathrm{R} R_\odot^2}{GM_\odot}\,. \tag{1.234}$$

Výsledok sa líši o 0,01 s, čo je prijateľná presnosť.

1.4.15 AO 2023, úloha 1 – Netradičné orbitálne dráhy – riešenie

(a) Vyjdeme z 3. Keplerovho zákona, ktorý si napíšeme pre Zem aj Mesiac a vzájomne vydelíme

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,, \tag{1.235}$$

$$\frac{M_\oplus}{M_\odot} = \left(\frac{r_☾}{r_\oplus}\right)^3\left(\frac{P_\oplus}{P_☾}\right)^2\,. \tag{1.236}$$

V takomto prípade chceme splniť podmienku $\frac{M_\oplus}{M_\odot} \ll 1$, čo overíme dosadením do rovnice vyššie

$$\frac{M_\oplus}{M_\odot} = \left(\frac{7}{45}\right)^3\cdot 3^2 = 0{,}034\,. \tag{1.237}$$

Zároveň nemusíme nijak overovať $M_{☾} \ll M_\oplus$, pretože $M_{☾}$ si môžeme nastaviť ľubovoľne malé bez žiadneho obmedzenia.

(b) Umiestnime testovaciu časticu s nekonečne malou hmotnosťou na okraj Hillovej sféry r_H okolo Zeme. V takom prípade musí platiť rovnováha síl

$$\frac{GM_\oplus}{r_\mathrm{H}^2} - \frac{GM_\odot}{(r_\oplus - r_\mathrm{H})^2} + \Omega^2(r_\oplus - r_\mathrm{H}) = 0\,. \tag{1.238}$$

Prvý člen predstavuje gravitáciu Zeme, druhý gravitáciu Slnka, ktorá proti nej bojuje a tretí je odstredivá sila, pričom význam Ω je

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus^3}}\,, \tag{1.239}$$

$$\frac{M_\oplus}{r_\mathrm{H}^2} - \frac{M_\odot}{(r_\oplus - r_\mathrm{H})^2} + \frac{M_\odot}{r_\oplus^3}(r_\oplus - r_\mathrm{H}) = 0\,, \tag{1.240}$$

$$\frac{M_\oplus}{r_\mathrm{H}^2} - \frac{M_\odot}{r_\oplus^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus}\right)^2} + \frac{M_\odot}{r_\oplus^3}(r_\oplus - r_\mathrm{H}) = 0\,. \tag{1.241}$$

Na druhý člen využijeme aproximáciu $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$

$$\frac{M_\oplus}{r_\mathrm{H}^2} - \frac{M_\odot}{r_\oplus^2}\left(1 + 2\frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus}\right) + \frac{M_\odot}{r_\oplus^2}(1 - \frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus}) = 0\,, \tag{1.242}$$

$$\frac{M_\oplus}{r_\mathrm{H}^2} - \frac{M_\odot}{r_\oplus^2}\left(1 + 2\frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus} - 1 + \frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus}\right) = 0\,, \tag{1.243}$$

$$\frac{M_\oplus}{r_\mathrm{H}^2} - \frac{M_\odot}{r_\oplus^2}\left(3\frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus}\right) = 0\,, \tag{1.244}$$

$$\frac{M_\oplus}{r_\mathrm{H}^2} - 3\frac{M_\odot r_\mathrm{H}}{r_\oplus^3} = 0\,, \tag{1.245}$$

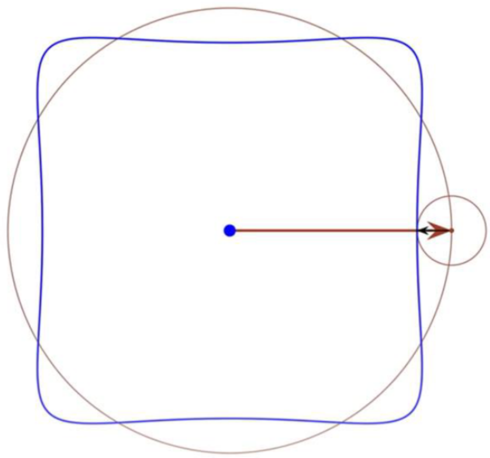
$$\frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus} = \sqrt[3]{\frac{M_\oplus}{3M_\odot}}\,. \tag{1.246}$$

Po dosadení výsledku predchádzajúcej úlohy dostaneme riešenie

$$\frac{r_\mathrm{H}}{r_\oplus} = \sqrt[3]{\frac{0{,}034}{3}} = 0{,}22 > \frac{7}{45} \approx 0{,}16\,. \tag{1.247}$$

Takže Mesiac sa v našej úlohe nachádza vo vnútri Hillovej sféry Zeme.

(c) Dráha by mala značne pripomínať štvorec.

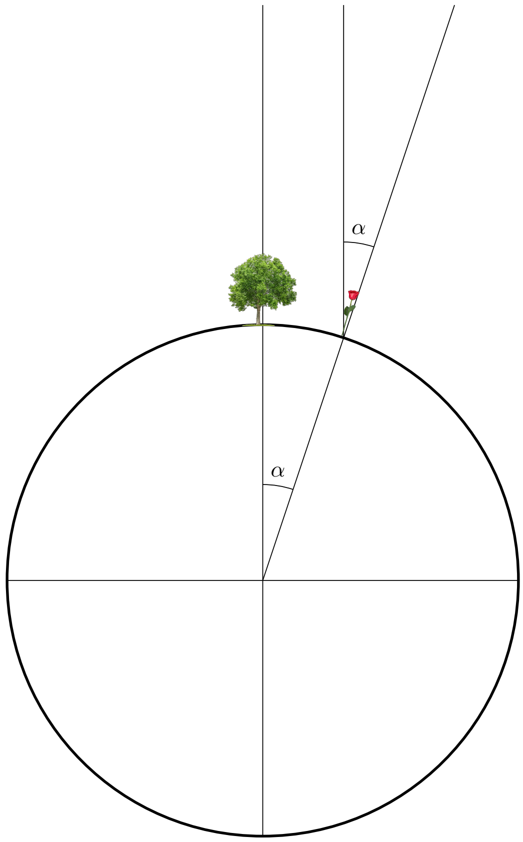


Kapitola 2

Geometria a čas (riešenia)

2.1 Kategória ZŠ, domáce kolo – riešenia

2.1.1 AO 2008, úloha 3 – riešenie



Vyjdeme z nakresleného obrázka. Uhol, ktorý zvierajú spojnice stredu planéty s baobabom a ružou je rovnaký ako uhol, pod ktorým svieti na ružu. Obvod planéty ($O = 2\pi R$) vypočítame z trojčlenky

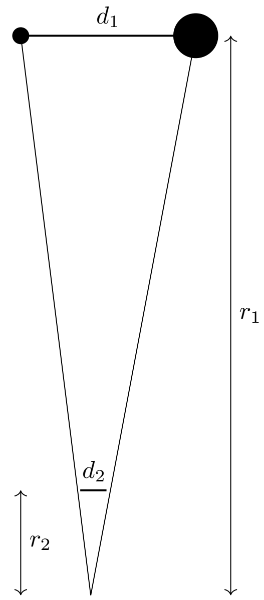
$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{6{,}28}{O}\,, \tag{2.1}$$

$$\frac{10°}{360°} = \frac{6{,}28}{2\pi R}\,. \tag{2.2}$$

Polomer planéty je

$$R = \frac{6{,}28 \cdot 360}{2\pi \cdot 10} = 36\,\mathrm{km}\,. \tag{2.3}$$

2.1.2 AO 2008, úloha 4 – riešenie



Využijeme podobnosť trojuholníkov (viď. obrázok)

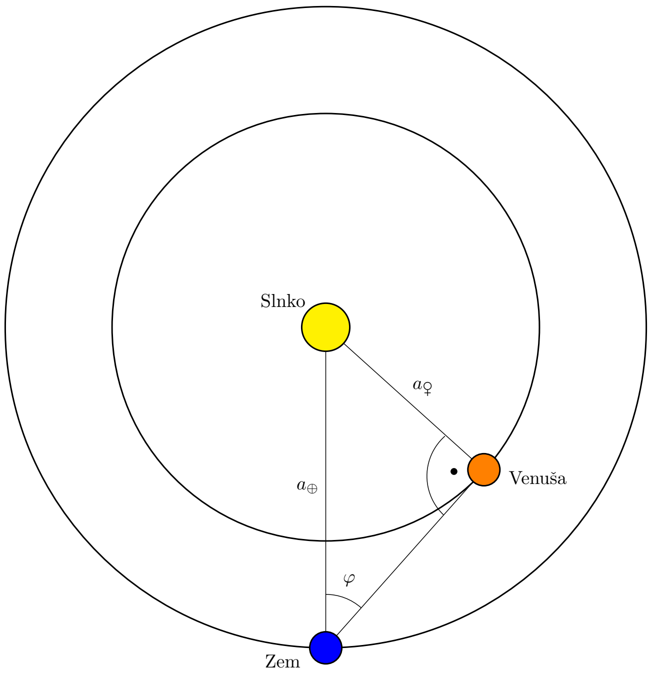
$$\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}\,, \tag{2.4}$$

$$r_1 = \frac{d_1}{d_2} r_2 = \frac{389\,000\,000}{0{,}02} \cdot 0{,}5 = 9{,}73 \cdot 10^9\,\mathrm{m}\,. \tag{2.5}$$

2.1.3 AO 2008, úloha 5 – riešenie

Jeden siderický deň trvá 23 h 56 min 4,1 s $= 23 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 4{,}1 = 86\,164{,}1$ s. 183 slnečných dní je $\frac{86400}{86164{,}1} \cdot 183 = 183{,}5$ siderických dní.

2.1.4 AO 2008, úloha 6 – riešenie



Situácia je znázornená na obrázku. Spojnica Zeme a Venuše v maximálnej elongácii je dotyčnicou ku dráhe Venuše. Táto dotyčnica je v bode dotyku kolmá na polomer dráhy Venuše. Máme tak pravouhlý trojuholník, z ktorého vieme vypočítať polomer dráhy Venuše

$$\frac{a_\mathrm{V}}{a_\oplus} = \sin 46° \,. \tag{2.6}$$

Polomer dráhy Venuše je $a_\mathrm{V} = 0{,}72\,\mathrm{au}$.

2.1.5 AO 2014, úloha 1 – Nafúknutie Zeme v Sci–Fi – riešenie

Vzdialenosti na povrchu sféry sa merajú pozdĺž hlavných kružníc (kružnice, ktorých stred je totožný so stredom Zeme). Obvod takýchto kružníc na Zemi je $O_1 = 2\pi R_\oplus$, obvod na nafúknutej Zemi je dvakrát väčší $O_2 = 2\pi(2R_\oplus) = 2O_1$. Povrch normálnej Zeme je $S_1 = 4\pi R_\oplus^2$, povrch nafúknutej Zeme je štyrikrát väčší $S_2 = 4\pi(2R_\oplus)^2 = 4S_1$. Vzdialenosti sa teda na nafúknutej Zemi zväčšia 2-krát a obsahy plôch 4-krát. Košice a Bratislava budú vzdialené 800 km a rozloha Slovenska bude 196 000 km^2.

2.1.6 AO 2014, úloha 2 – Jupiter a jeho mesiac Európa – riešenie

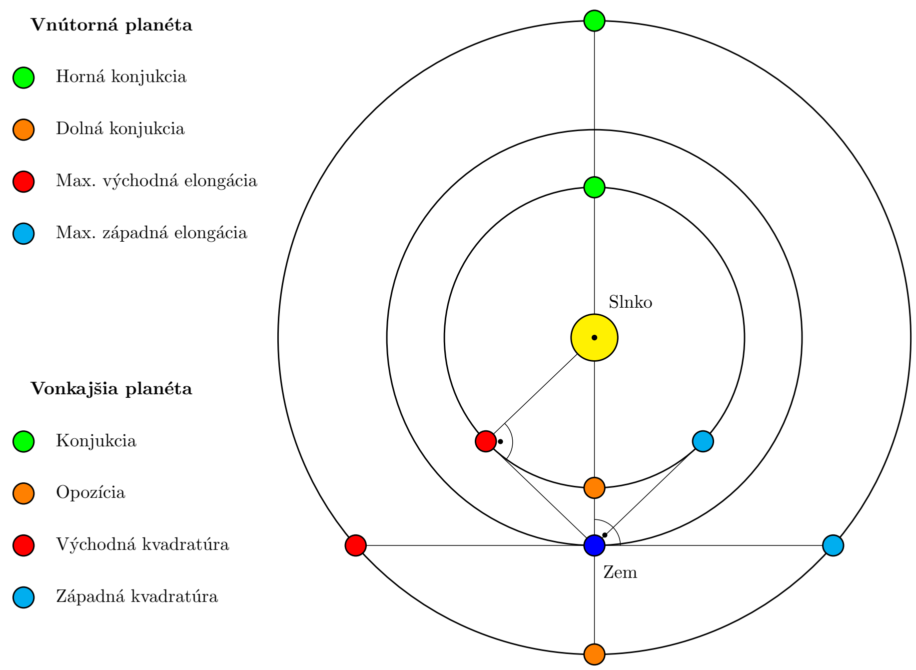
Uhlový rozmer Európy je

$$\theta_\mathrm{E} = 2 \arctan \frac{R_☾}{a_\mathrm{J} - a_\oplus} = 2 \cdot \arctan \frac{1{,}7374 \cdot 10^6}{(5{,}204 - 1) \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}} = 1{,}14'' \,. \tag{2.7}$$

2.1.7 AO 2015, úloha 2 – Ročná paralaxa – riešenie

$$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}545}\,\mathrm{pc} = 1{,}83\,\mathrm{pc} = 5{,}97\,\mathrm{ly} = 377\,000\,\mathrm{au}\,. \tag{2.8}$$

2.1.8 AO 2015, úloha 5 – Rádiolokácia – riešenie



Všetky potrebné aspekty vnútorných aj vonkajších planét sú nakreslené na obrázku. Keďže signál musí prejsť zo Zeme na planétu a späť, jeho dráha je dvojnásobkom vzdialenosti planéty od Zeme. Radarový signál sa pohybuje rýchlosťou svetla, čas medzi vyslaním a prijatím signálu je

$$t = \frac{2d}{c}\,. \tag{2.9}$$

Merkúr: vzdialenosť od Zeme je

$$d = \frac{ct}{2} = \frac{2{,}9979 \cdot 10^8 \cdot 930}{2 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}} = 0{,}932\,\mathrm{au}\,. \tag{2.10}$$

Táto vzdialenosť zhruba zodpovedá maximálnej elongácii, kedy je vzdialenosť Merkúru od Zeme

$$d = \sqrt{a_\oplus^2 - a_\mathrm{M}^2} = \sqrt{1^2 - 0{,}387^2} = 0{,}922\,\mathrm{au}\,. \tag{2.11}$$

Mars: vzdialenosť od Zeme je

$$d = a_\oplus - a_♂ = 1{,}524 - 1 = 0{,}524\,\mathrm{au}\,. \tag{2.12}$$

Doba letu signálu

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}524 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{2{,}9979 \cdot 10^8} = 523\,\mathrm{s}\,. \tag{2.13}$$

Venuša: vzdialenosť zodpovedá dolnej konjunkcii, doba letu signálu je

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}28 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{2{,}9979 \cdot 10^{8}} = 279\,\mathrm{s}\,. \tag{2.14}$$

Jupiter: vzdialenosť od Zeme v kvadratúre a doba letu signálu sú

$$d = \sqrt{a_{\mathrm{J}}^2 - a_{\oplus}^2} = \sqrt{5{,}204^2 - 1^2} = 5{,}11\,\mathrm{au}\,. \tag{2.15}$$

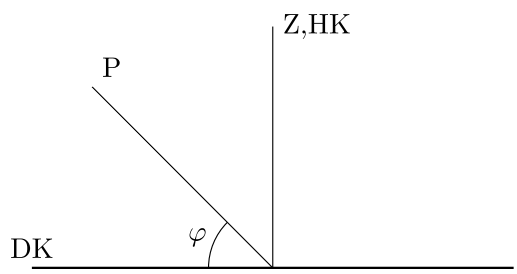
$$t = \frac{2 \cdot 5{,}11 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{2{,}9979 \cdot 10^{8}} = 5100\,\mathrm{s}\,. \tag{2.16}$$

Urán: vzdialenosť zodpovedá konjunkcii, doba letu signálu je

$$t = \frac{2 \cdot 20{,}2 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{2{,}9979 \cdot 10^{8}} = 20\,160\,\mathrm{s}\,. \tag{2.17}$$

Planéta	Doba medzi odoslaním a prijatím signálu	Aspekt planéty	Vzdialenosť planéty od Zeme
Merkúr	930 s	max. elongácia	0,932 au
Mars	523 s	opozícia	0,524 au
Venuša	279 au	dolná konjunkcia	0,28 au
Jupiter	5100 s	kvadratúra	5,11 au
Urán	20 160 s	konjunkcia	20,2 au

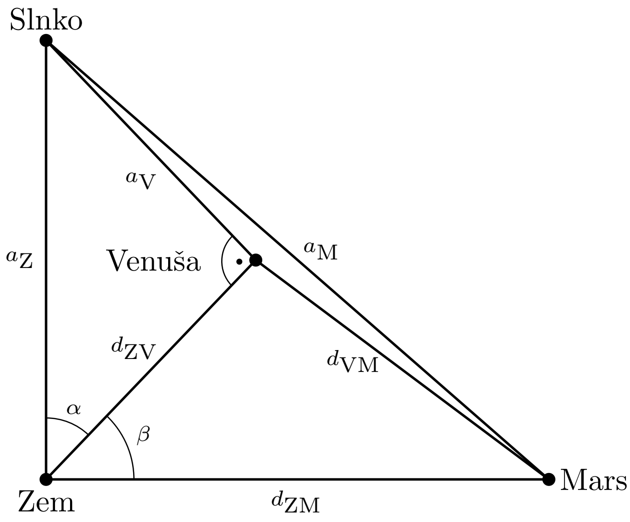
2.1.9 AO 2016, úloha 1 – Kulminácia hviezd – riešenie



Na severnej pologuli to nastane pre zemepisnú šírku $\varphi = 45°$ N a deklináciu $\delta = 45°$. Na južnej pologuli pre zemepisnú šírku $\varphi = 45°$ S a deklináciu $\delta = -45°$.

2.1.10 AO 2016, úloha 2 – Planéty v Slnečnej sústave – riešenie

Spojnice Venuše a Marsu so Zemou a Slnkom vytvárajú v danej chvíli pravouhlé trojuholníky.



Vzdialenosti Venuše aj Marsu od Zeme vypočítame z Pytagorovej vety

$$d_{ZV} = \sqrt{a_\oplus^2 - a_V^2} = \sqrt{1^2 - 0{,}723^2} = 0{,}691\,\mathrm{au}\,, \tag{2.18}$$

$$d_{ZM} = \sqrt{a_♂^2 - a_\oplus^2} = \sqrt{1{,}524^2 - 1^2} = 1{,}15\,\mathrm{au}\,. \tag{2.19}$$

Pre uhol α platí

$$\alpha = \arcsin\frac{a_V}{a_\oplus} = \arcsin\frac{0{,}723}{1} = 46{,}3°\,. \tag{2.20}$$

Uhol β je jeho doplnkom do 90°, teda $\beta = 90° - \alpha = 43{,}7°$. Vzdialenosť Marsu od Venuše vypočítame z kosínusovej vety

$$d_{VM}^2 = d_{ZV}^2 + d_{ZM}^2 + 2d_{ZV}d_{ZM}\cos\beta\,, \tag{2.21}$$

$$d_{VM} = \sqrt{0{,}691^2 + 1{,}15^2 - 2\cdot 0{,}691\cdot 1{,}15\cdot\cos 46{,}3°} = 0{,}84\,\mathrm{au}\,. \tag{2.22}$$

2.2 Kategória ZŠ, finále – riešenia

2.2.1 AO 2007, úloha 1 – riešenie

Hmotnosť pôvodnej kvapky sa rovná súčtu hmotností nových kvapiek

$$\frac{4}{3}\pi r_1^3\rho = N\frac{4}{3}\pi r_2^3\rho\,. \tag{2.23}$$

Počet nových malých kvapiek je

$$N = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{1^3}{0{,}5^3} = 8\,. \tag{2.24}$$

2.2.2 AO 2007, úloha 2 – riešenie

$$d = \sqrt{a_{♂}^2 - a_{\oplus}^2} = \sqrt{1{,}524^2 - 1^2} = 1{,}15\,\mathrm{au}\,. \tag{2.25}$$

2.2.3 AO 2007, úloha 7 – riešenie

$$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}545}\,\mathrm{pc} = 1{,}83\,\mathrm{pc} = 5{,}97\,\mathrm{ly} = 377\,000\,\mathrm{au}\,. \tag{2.26}$$

2.2.4 AO 2009, úloha 1 – Kulminácia Mesiaca dnes a zajtra – riešenie

Mesiac každý deň kulminuje o niečo neskôr ako v predchádzajúci deň. Čas kulminácie Mesiaca takto každý deň klesá, až sa vráti naspäť o 24 hodín. Ak zanedbáme pohyb Zeme okolo Slnka, tak 24-hodinový posun kulminácie sa naskladá za 27,3217 dní (siderický Mesiac). Na jeden deň pripadá posun kulminácie o

$$\Delta t = \frac{24}{27{,}3217} = 0{,}8784\,\mathrm{h} = 53\,\mathrm{min}\,. \tag{2.27}$$

Horná kulminácia Mesiaca bude zajtra o 53 minút neskôr, teda o 22:53.

2.2.5 AO 2010, úloha 1 – riešenie

Jeden siderický deň trvá 23 h 56 min 4,1 s $= 23 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 4{,}1 = 86\,164{,}1$ s. 183 slnečných dní je $\frac{86400}{86164{,}1} \cdot 183 = 183{,}5$ siderických dní.

2.2.6 AO 2013, úloha 4 – riešenie

Na vyriešenie úlohy stačí určiť, koľko dní uplynulo medzi uvedenými okamihmi. Čas stredu zatmenia v Babylone korigujeme na UT o 2 h 58 min, t. j. 19. 3. 721 pred n. l., 18:02 UT. Priestupný bol rok 4 n. l., priestupný bol aj rok 1 pred n. l., priestupné boli aj roky 5 pred n. l., 9 pred n. l. 21 pred n.l. a aj 721 pred n. l. Zo spolu 720 rokov od roku 721 pred n. l. do roku 1 pred n. l. bolo priestupných 180 a obyčajných 540 rokov.
Od 19. marca 721 pred n. l. do 19. marca roku 1 pred n. l. spolu uplynulo

$$180 \cdot 366 + 540 \cdot 365 = 262\,980\,\text{dní}\,. \tag{2.28}$$

Od 19. marca roku 1 pred n. l. do 19. marca roku 1 n. l. uplynul rok s 365 dňami.
Od 19. marca roku 1 n. l. do 19. marca roku 2011 by boli priestupnými, ak by sa nezmenil Juliánsky kalendár na Gregoriánsky, roky 4, 8, 12 n. l. , ... až 2008, t. j. bolo by spolu 502 priestupných rokov. Na obyčajné roky by zostalo z intervalu 2010 rokov práve 1508 rokov. Ich sčítaním dostaneme pre dĺžku tohto obdobia

$$502 \cdot 366 + 1508 \cdot 365 = 734\,152\,\text{dní}\,. \tag{2.29}$$

Od 19. marca 2011 do 15. júna 2011 uplynulo spolu 12 dní marca, 30 dní apríla, 31 dní mája a 15 dní júna (pretože stred zatmenia nastal neskôr v čase UT, ako v Babylonskom zatmení), spolu 88 dní.
Ak by zostal v platnosti Juliánsky kalendár, boli by tieto dva úkazy oddelené uplynutím súčtu týchto vyššie uvedených dní v zvolených intervaloch čísel, t.j. spolu: 997 585 dní.
Reforma kalendára však 13 dní ubrala. Po štvrtku 4. 10. 1582 nasledoval piatok 15. 10. 1582, a roky 1700, 1800 a 1900 neboli po Gregoriánskej reforme priestupné. Odčítaním spolu 13 dní sa hľadaný interval zmenší na

$$997\,585 - 13 = 997\,572\,\text{dní}\,. \tag{2.30}$$

Dopočítaním rozdielu v UT časoch maximálnej fázy zatmenia môžeme ešte pridať

$$20\,\text{h}\ 14\,\text{min} - 18\,\text{h}\ 2\,\text{min} = 2\,\text{h}\ 12\,\text{min} = 0{,}092\,\text{dní}\,. \tag{2.31}$$

Celkový čas medzi zatmeniami (v podstate rozdiel JD oboch udalostí) teraz delíme približnou hodnotou synodického Mesiaca, napr 29,5306. Dostaneme počet lunácií

$$\frac{997\,572{,}092}{29{,}5306} = 33\,780{,}959\,41\,. \tag{2.32}$$

Počet lunácií by sa tiež mohol získať z ďalších údajoch o zatmeniach, najmä ich čísla Sarosu. Zaokrúhlením počtu lunácií na najbližšie celé číslo (33 781) dostávame pre strednú periódu synodického Mesiaca hodnotu

$$\frac{997\,572{,}092}{33\,781} = 29{,}530\,567\,24\,\text{dní}\,, \tag{2.33}$$

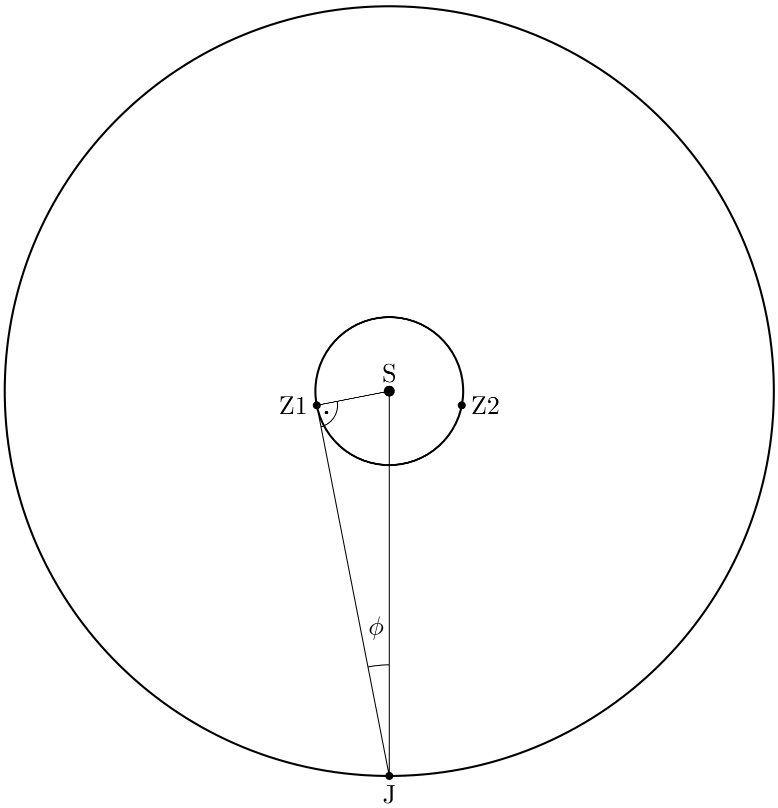
t.j. 29 dní 12 h 44 min 1 s stredného slnečného času.

2.2.7 AO 2014, úloha 4 – Veľkonočná nedeľa – riešenie

Cyklický lunárny rok trvá $12 \cdot 29{,}5 = 354$ dní, zatiaľ čo kalendárny rok trvá 365 dní, ekvivalentný spln preto nastane v nasledujúcom roku o 11 kalendárnych dní skôr, 3. apríla 2015. Kalendárny rok trvá 52 týždňov a jeden deň. 20. 4. 2015 bude preto pondelok a nedeľa bude 19. 4. 2015 a každých 7 dní skôr; 12. 4 a 5. 4. 2014. Najbližšou nedeľou po splne cyklického Mesiaca v roku 2015 a teda Veľkonočnou nedeľou bude 5. apríl 2015.

2.3 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

2.3.1 AO 2007, úloha 2 – riešenie



(a) Ide o aspekty nazývané kvadratúry (pozícia Zeme Z1 – západná kvadratúra Jupitera, viditeľný je na rannej oblohe, Z2 – východná kvadratúra Jupitera, planéta je viditeľná na večernej oblohe).

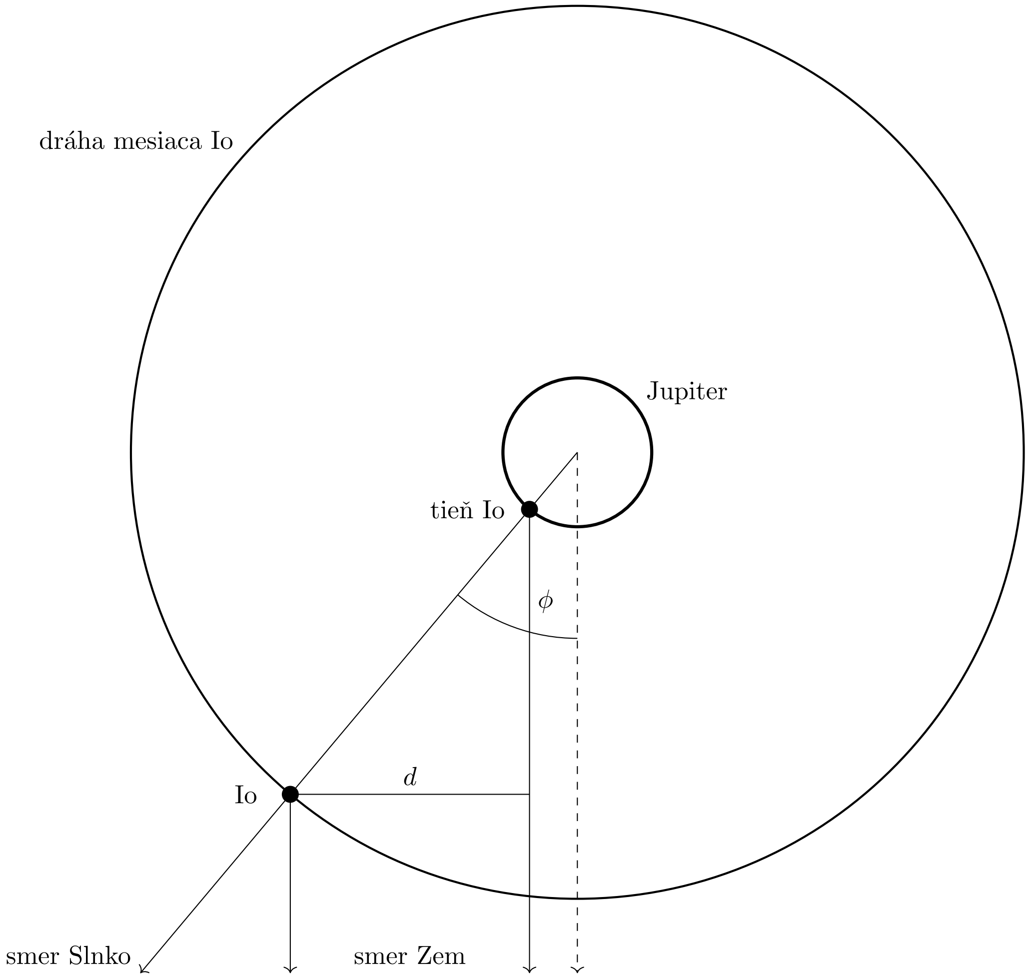
(b) Uhol ϕ vyrátame s využitím pravouhlého trojuholníka S – Z1 – J.

$$\sin\phi = \frac{r_\oplus}{r_\mathrm{J}} = \frac{1}{5{,}204} = 0{,}192\,, \tag{2.34}$$

$$\phi = 11{,}1^\circ\,. \tag{2.35}$$

Vo vzorci je $r_\oplus$ vzdialenosť SZ, r_J je vzdialenosť SJ. Ten istý uhol zvierajú aj spojnice Jupitera so Slnkom resp. Zemou na ďalšom obrázku. Vzdialenosť priemetov Io a jeho tieňa do roviny kolmej na spojnicu Zem - Jupiter určíme (r_IJ je vzdialenosť stredov Io a Jupitera, $r_\mathrm{I,p}$ je vzdialenosť Io od povrchu Jupitera, R_J je polomer Jupitera)

$$d = r_\mathrm{I,p}\sin\phi = (r_\mathrm{IJ} - R_\mathrm{J})\sin\phi = (421700 - 69911)\cdot 0{,}192 = 67{,}5\cdot 10^3\,\mathrm{km} = 0{,}97\,R_\mathrm{J}\,. \tag{2.36}$$



(c) V prípade mesiaca Io je rozdiel medzi synodickou a siderickou obežnou dobou minimálny, môžeme použiť hodnotu $T = 42{,}5\,\mathrm{h}$. Za túto dobu opíše mesiac uhol 360°. Interval medzi vstupom mesiaca a tieňa na disk Jupitera potom predstavuje dobu, za ktorý opíše Io spomínaný uhol $\phi = 11{,}1°$. Použitím priamej úmery tak vychádza časový interval

$$t = \frac{11{,}1}{360} \cdot 42{,}5 = 1{,}31\,\mathrm{h}\,. \tag{2.37}$$

Ak sa Jupiter nachádza v blízkosti západnej kvadratúry so Slnkom, nastáva najskôr vstup tieňa, až potom samotného mesiaca. Pre východnú kvadratúru je poradie úkazov opačné.

2.3.2 AO 2009, úloha 5 – Hviezda Toliman – riešenie

(a) Situácia je znázornená na obrázku. Hraničná zemepisná šírka je

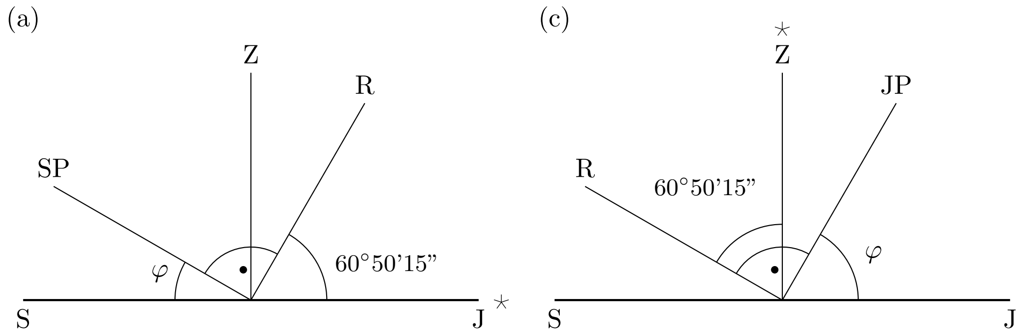
$$\varphi = 90° - 60°50'15'' = 29°9'45''\ \mathrm{N}\,. \tag{2.38}$$

(b) Toliman bude kulminovať o $14^{\mathrm{h}}\,39^{\mathrm{m}}\,35^{\mathrm{s}}$ miestneho hviezdneho času. Jesenný bod kulminuje vždy o 12^{h} miestneho hviezdneho času. Počas jarnej rovnodennosti kulminuje jesenný bod o polnoci. Jarná rovnodennosť nastáva zhruba 20.3., z trojčlenky zistíme, koľko dní po jarnej rovnodennosti bude o polnoci kulminovať Toliman.

$$t = \frac{2 \cdot 60 + 40}{24 \cdot 60} \cdot 365{,}25 = 40{,}6\,\text{dní}\,. \tag{2.39}$$

To je zhruba 41 dní, takže Toliman bude o polnoci kulminovať 30. 4.

(c) Z obrázku vidíme, že je to na zemepisnej šírke $\varphi = 60°50'15''$ S.



2.3.3 AO 2010, úloha 2 – Vega v Lýre – riešenie

(a) Vzdialenosť Vegy je

$$r = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}11} = 9{,}09\,\text{pc}\,. \tag{2.40}$$

Svetlo bude cestovať po dobu

$$t = \frac{r}{c} = \frac{9{,}09 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}}{2{,}9979 \cdot 10^{8}} = 9{,}36 \cdot 10^{8}\,\text{s} = 29{,}7\,\text{rokov}\,. \tag{2.41}$$

(b)

$$t = \frac{r}{2v} = \frac{2{,}81e17}{2 \cdot 30 \cdot 10^{3}} = 4{,}68 \cdot 10^{12}\,\text{s} = 148\,000\,\text{rokov}\,. \tag{2.42}$$

2.3.4 AO 2011, úloha 5 – riešenie

(a) Situácia je znázornená na obrázku. Pre zemepisnú šírku platí

$$\sin\varphi = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\,. \tag{2.43}$$

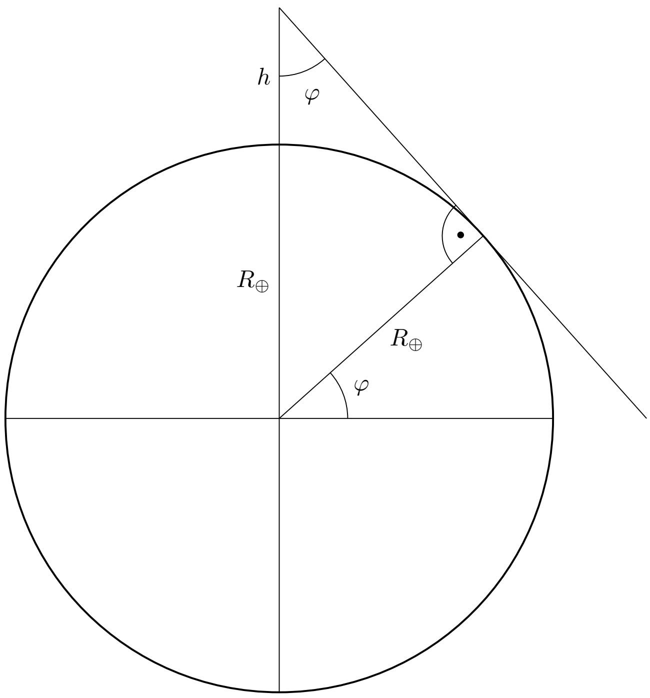
Kozmická loď musí byť vo výške

$$h = \frac{R_\oplus}{\sin\varphi} - R_\oplus = \frac{6378}{\sin 49°} - 6378 = 2070\,\text{km}\,. \tag{2.44}$$

(b) Hraničná zemepisná šírka je

$$\sin\varphi = \frac{6378}{6378 + 300}\,, \tag{2.45}$$

$$\varphi = 73^\circ\,. \tag{2.46}$$



2.3.5 AO 2012, úloha 4 – riešenie

Môže sa to stať v okolí pólov, hviezdy v okolí rovníka, ktoré by inak nevychádzali nad obzor sa vďaka refrakcii stanú cirkumpolárne. Toto sa deje na zemepisných šírkach 89°26′ N až 90° N a 89°26′ S až 90° S. Podobne pre pozorovateľov v okolí rovníka by hviezdy v blízkosti pólov bez refrakcie neboli viditeľné, ale vďaka refrakcii sa dostanú nad obzor. Hviezdy dostatočne blízko pólov sa počas noci hýbu iba minimálne, preto zostanú nad obzorom. Toto sa deje na zemepisných šírkach 0°34′ S až 0°34′ N.

2.3.6 AO 2013, úloha 1 – riešenie

Sme 2 mesiace po jesennej rovnodennosti. Počas jesennej rovnodennosti kulminuje jarný bod ($\alpha = 0^\mathrm{h}$) o polnoci. O dva mesiace neskôr je o polnoci hviezdny čas $\theta = 4^\mathrm{h}$. Sírius kulminuje pri hviezdnom čase $\theta = \alpha = 6^\mathrm{h}45^\mathrm{m}$, teda zhruba o 2:45 v noci. Určitá nepresnosť je spôsobená tým, že nevieme kedy presne nastala jesenná rovnodennosť a nenachádzame sa v strede časového pásma. Tieto dve zanedbania ale dohromady spôsobia nepresnosť menšiu ako pol hodiny, takže spĺňame požadovanú presnosť zo zadania.

2.3.7 AO 2013, úloha 5 – riešenie

Obežná doba planéty je

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}\,, \tag{2.47}$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{(0{,}7\cdot 1{,}496\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 1{,}9891\cdot 10^{30}}} = 1{,}31\cdot 10^7\,\mathrm{s} = 3631\,\mathrm{h}\,. \tag{2.48}$$

Planéta obieha okolo hviezdy retrográdne, to znamená, že obieha v opačnom zmysle ako rotuje hviezda. V zadaní sa nás najskôr pýtajú na dĺžku trvania solárneho dňa v prípade retrográdnej rotácie, teda keď planéta nielen obieha, ale aj rotuje v opačnom zmysle ako hviezda. To ale znamená, že planéta rotuje v rovnakom zmysle ako obieha okolo hviezdy a preto môžeme na výpočet synodickej rotačnej doby použiť vzorec, ktorý sa bežne používa pre prográdnu rotáciu a obeh.
Siderická rotačná perióda je $T = 6\,\mathrm{h}$. Synodická rotačná doba v prípade retrográdnej rotácie je

$$S_\mathrm{R} = \frac{1}{\frac{1}{T}+\frac{1}{P}} = \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3631}} = 5^\mathrm{h}\,59^\mathrm{m}\,25^\mathrm{s}\,. \tag{2.49}$$

Na výpočet synodickej doby v prípade prográdnej rotácie zase použijeme vzorec, ktorý sa bežne využíva pre prográdny obeh a retrográdnu rotáciu. Dostaneme

$$S_\mathrm{P} = \frac{1}{\frac{1}{T}-\frac{1}{P}} = \frac{1}{\frac{1}{6}-\frac{1}{3631}} = 6^\mathrm{h}\,0^\mathrm{m}\,36^\mathrm{s}\,. \tag{2.50}$$

2.3.8 AO 2014, úloha 1 – Neznáma planéta – riešenie

Ak „Polárka“ zmenila svoju výšku o 5°, znamená to, že astronaut zmenil svoju “zemepisnú šírku“ o 5°. Polomer planéty vypočítame pomocou trojčlenky

$$\frac{5^\circ}{360^\circ} = \frac{200}{2\pi R}\,, \tag{2.51}$$

$$R = \frac{200\cdot 360}{2\pi\cdot 5} = 2292\,\mathrm{km}\,. \tag{2.52}$$

2.3.9 AO 2014, úloha 2 – Zem pri pohľade z družice – riešenie

Povrch plochy privrátenej pologule Zeme je $S = 2\pi R_\oplus^2$, plocha povrchu guľového vrchlíka je $S_\mathrm{V} = 2\pi R_\oplus v$. Požadujeme, aby družica mohla zobraziť polovicu privrátenej pologule, teda musí platiť $S_\mathrm{V} = \frac{1}{2}S$. Z toho dostaneme $v = \frac{1}{2}R_\oplus$, hraničná zemepisná šírka, ktorú bude družica pozorovať bude teda

$$\sin\varphi = \frac{R_\oplus - v}{R_\oplus} = \frac{1}{2}\,, \tag{2.53}$$

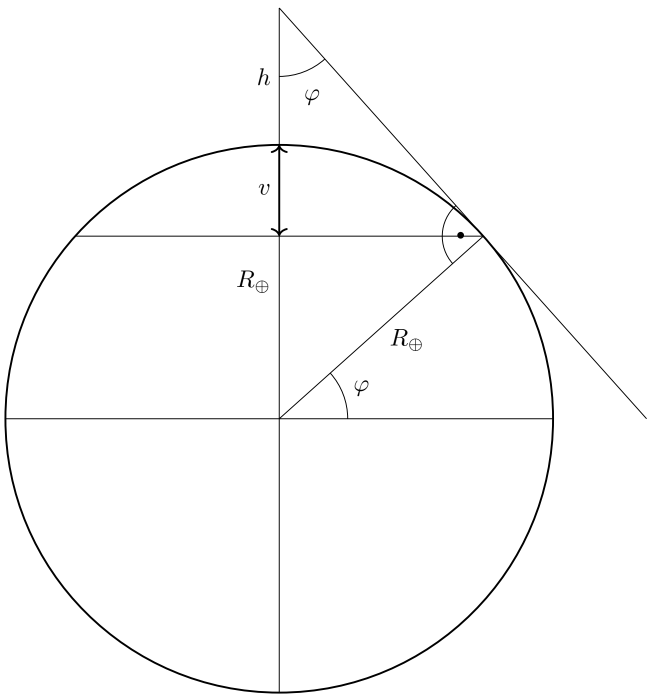
$$\varphi = 30^\circ\,. \tag{2.54}$$

Pre túto zemepisnú šírku zároveň platí vzťah

$$\sin\varphi = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} \,. \tag{2.55}$$

Požadovaná výška družice nad povrchom Zeme je

$$h = \frac{6378}{\sin 30^\circ} - 6378 = 6378\,\mathrm{km}\,. \tag{2.56}$$



2.3.10 AO 2016, úloha 3 – Dvojhviezdna sústava – riešenie

(a) Siderická obežná doba je čas, za ktorý teleso vykoná jeden obeh okolo ťažiska vzhľadom ku (nehybným) hviezdam.

(b) Ide vlastne iba o výpočet dĺžky synodického dňa za predpokladu prográdnej rotácie. Použijeme označenie P pre siderickú obežnú periódu a T pre siderickú periódu rotácie

$$S = \frac{1}{\frac{1}{P} - \frac{1}{T}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{20}} = 5\,\mathrm{h}\,. \tag{2.57}$$

Čas medzi kulmináciami hviezd je polovičný, teda 2,5 h.

(c) Opäť počítame synodický deň, tentokrát pre retrográdnu rotáciu

$$S = \frac{1}{\frac{1}{P} + \frac{1}{T}} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{20}} = 3{,}3\,\mathrm{h}\,. \tag{2.58}$$

Čas medzi kulmináciami hviezd je 1,67 h.

2.3.11 AO 2017, úloha 3 – Krabia hmlovina – riešenie

(a) Veľkosť v jednej osi je

$$a = \alpha r = \frac{420 \cdot 2 \cdot 10^3}{206265} = 4{,}1\,\mathrm{pc}\,. \tag{2.59}$$

Veľkosť v druhej osi je

$$b = \beta r = \frac{300 \cdot 2 \cdot 10^3}{206265} = 2{,}9\,\mathrm{pc}\,. \tag{2.60}$$

Rozmery hmloviny sú teda 4,1 pc × 2,9 pc.

(b) Rýchlosť prepočítame z kilometrov za sekundu na parsek za rok

$$v = \frac{1500 \cdot 10^3 \cdot 86400 \cdot 365{,}25}{3{,}086 \cdot 10^{16}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{pc\,rok^{-1}}\,. \tag{2.61}$$

Potrebujeme vypočítať, ako dlho už hmlovina expanduje (faktor 2 je tam kvôli rozpínaniu sa do obidvoch strán)

$$t = \frac{b}{2v} = \frac{2{,}9}{2 \cdot 0{,}0015} = 967\,\mathrm{rokov}\,. \tag{2.62}$$

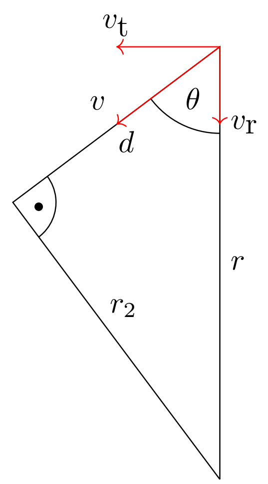
K výbuchu supernovy došlo zhruba v roku 2017 − 967 = 1050, teda v 11. storočí.

2.3.12 AO 2021, úloha 1 – Trójania – asteroidy – riešenie

Trójania, Jupiter a Slnko tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka, takže uhol je 60°.

2.4 Kategória SŠ, finále – riešenia

2.4.1 AO 2008, úloha 3 – Vlastný pohyb hviezdy – riešenie



Hviezda bude ku Slnku najbližšie vo chvíli, kedy jej radiálna rýchlosť bude nulová - v tej chvíli sa prestane ku Slnku približovať a začne sa od neho vzďaľovať.

(a) Podľa obrázka je vzdialenosť, ktorú hviezda ešte musí prejsť

$$d = r\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\pi}\,. \tag{2.63}$$

Prejde ju za čas

$$t = \frac{d}{V} = \frac{\cos\theta}{\pi V}\,. \tag{2.64}$$

(b) Minimálna vzdialenosť a príslušná paralaxa sú

$$r_2 = r\sin\theta = \frac{\sin\theta}{p}\,, \tag{2.65}$$

$$p_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{p}{\sin\theta}\,. \tag{2.66}$$

Ako bolo spomenuté vyššie, radiálna rýchlosť bude nulová, $v_{\mathrm{r}} = 0$, tangenciálna rýchlosť sa preto bude rovnať celkovej rýchlosti, $v_{\mathrm{t}} = V$. Zdanlivú magnitúdu určíme z Pogsonovej rovnice

$$m_2 - m = 5\log\frac{r_2}{r} = 5\log\frac{p}{p_2}\,, \tag{2.67}$$

$$m_2 = m + 5\log\frac{r_2}{r} = m + 5\log\frac{p}{p_2}\,. \tag{2.68}$$

2.4.2 AO 2009, úloha 3 – riešenie

Pri východe a západe je $h = 0°$, vzťah zo zadania sa preto zjednoduší na

$$\cos t = -\tan\delta \tan\varphi = -\tan 19°8'3'' \tan 21°20'39'' . \tag{2.69}$$

Hodinový uhol pri západe hviezdy je $t_z = 6^h\,31^m\,10{,}1^s$, pri východe je $t_v = -6^h\,31^m\,10{,}1^s$. Hviezda zapadá pri hviezdnom čase $\theta_z = \alpha + t_z = 14^h\,16^m\,5{,}3^s + 6^h\,31^m\,10{,}1^s = 20^h\,47^m\,15{,}4^s$ a vychádza pri hviezdnom čase $\theta_v = \alpha + t_v = 14^h\,16^m\,5{,}3^s - 6^h\,31^m\,10{,}1^s = 7^h\,44^m\,55{,}2^s$.
Časové pásmo Honolulu je UTC-10^h. Rozdiel v miestnom hviezdnom čase oproti Greenwichskému poludníku je $\frac{157°50'8''}{15} = 10^h\,31^m\,20{,}5^s$. 1. 5. o polnoci UTC je v Honolulu 30. 4. 14:00 a hviezdny čas je $\theta_H = 14^h\,36^m\,13{,}8^s - 10^h\,31^m\,20{,}5^s = 4^h\,4^m\,53{,}3^s$. Hviezda vyjde, keď sa hviezdny čas zvýši o $\theta_v - \theta_H = 7^h\,44^m\,55{,}2^s - 4^h\,4^m\,53{,}3^s = 3^h\,40^m\,1{,}9^s$. Tento rozdiel je potrebné prepočítať na rozdiel v bežnom občianskom čase. Prevodná konštanta z hviezdneho času na občiansky je

$$\frac{24 \cdot 3600}{23 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 4{,}1} = 1{,}002\,738 . \tag{2.70}$$

Hviezda vyjde $\frac{3^h\,40^m\,1{,}9^s}{1{,}002\,738} = 3^h\,39^m\,25{,}9^s$ po 14:00, teda o 17:39:25,9.
Rozdiel medzi hviezdnym časom východu a západu je $\theta_z - \theta_v = 2t_z = 2 \cdot 6^h\,31^m\,10{,}1^s = 13^h\,2^m\,20{,}2^s$. Po prepočte na bežný čas nám vyjde časový rozdiel medzi východom a západom $\frac{13^h\,2^m\,20{,}2^s}{1{,}002\,738} = 13^h\,0^m\,12{,}0^s$. Máme $17^h\,39^m\,25{,}9^s + 13^h\,0^m\,12{,}0^s - 24^h = 6^h\,39^m\,37{,}9^s$, západ hviezdy teda nastane 1. 5. o 6:39:37,9.

2.4.3 AO 2010, úloha 3 – riešenie

V Pogsonovej rovnici pre vonkajšiu planétu použijeme index 1 pre opozíciu a 2 pre konjunkciu. Vzdialenosti planéty od Zeme sú $r_1 = a - a_\oplus$ a $r_2 = a + a_\oplus$

$$m_2 - m_1 = 5 \log \frac{r_2}{r_1} , \tag{2.71}$$

$$\frac{a + a_\oplus}{a - a_\oplus} = 10^{\frac{0{,}85}{5}} = 1{,}48 , \tag{2.72}$$

$$a + a_\oplus = 1{,}48a - 1{,}48a_\oplus , \tag{2.73}$$

$$2{,}48a_\oplus = 0{,}48a , \tag{2.74}$$

$$a = \frac{2{,}48}{0{,}48} a_\oplus = 5{,}17\,\mathrm{au} . \tag{2.75}$$

Prvou planétou je Jupiter. V Pogsonovej rovnici pre vnútornú planétu použijeme index 1 pre maximálnu elongáciu (vzdialenosť planéty je $r_1 = \sqrt{a_\oplus^2 - a^2}$) a 2 pre hornú konjunkciu (vzdialenosť planéty je $r_2 = a_\oplus + a$)

$$m_2 - m_1 = 5 \log \frac{r_2}{r_1} , \tag{2.76}$$

$$\frac{a_\oplus + a}{\sqrt{a_\oplus^2 - a^2}} = 10^{\frac{0{,}92}{5}} , \tag{2.77}$$

$$\frac{(a_\oplus + a)^2}{(a_\oplus + a)(a_\oplus - a)} = 10^{\frac{2\cdot 0{,}92}{5}} = 2{,}33\,, \tag{2.78}$$

$$a_\oplus + a = 2{,}33a_\oplus - 2{,}33a\,, \tag{2.79}$$

$$3{,}33a = 1{,}33a_\oplus\,, \tag{2.80}$$

$$a = \frac{1{,}33}{3{,}33}a_\oplus = 0{,}40\,\mathrm{au}\,. \tag{2.81}$$

Druhou planétou je Merkúr.

2.4.4 AO 2011, úloha 3 – riešenie

Obežná rýchlosť Venuše je

$$v = \frac{2\pi a}{P} = \frac{2\pi\cdot 0{,}723\cdot 1{,}496\cdot 10^{11}}{0{,}615\cdot 365{,}25\cdot 86400} = 35\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{2.82}$$

Ročná aberácia je uhol definovaný nasledujúcim spôsobom

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} = \frac{35\,000}{2{,}9979\cdot 10^8}\,, \tag{2.83}$$

$$\alpha = 24{,}1''\,. \tag{2.84}$$

2.4.5 AO 2011, úloha 4 – riešenie

(a) Zemepisná šírka tohto miesta je rovnaká ako deklinácia Mesiaca, $\varphi = \delta_☾ = 28°21'24{,}59''$ N. Ak sa Mesiac nachádza v zenite, znamená to, že práve kulminuje. Ku kulminácii Mesiaca dochádza pri hviezdnom čase $\theta = \alpha_☾ = 6^\mathrm{h}\,20^\mathrm{m}\,40{,}536^\mathrm{s}$. Na nultom poludníku poznáme hviezdny čas pre 25.3.2007 o 0:00 UTC, potrebujeme zistiť, aký je hviezdny čas v momente, kedy nastala prvá štvrť Mesiaca, teda o 18:16. Prevodný faktor medzi hviezdnym a občianskym časom je

$$\frac{24\cdot 3600}{23\cdot 3600 + 56\cdot 60 + 4{,}1} = 1{,}002\,738\,. \tag{2.85}$$

Hviezdny čas na nultom poludníku o 18:16 je $\theta = 12^\mathrm{h}\,8^\mathrm{m}\,18{,}705^\mathrm{s} + 1{,}002\,738\cdot 18^\mathrm{h}\,16^\mathrm{m}\,0^\mathrm{s} - 24^\mathrm{h}\,0^\mathrm{m}\,0^\mathrm{s} = 6^\mathrm{h}\,27^\mathrm{m}\,18{,}76^\mathrm{s}$. Mesiac kulminuje pri o trochu skoršom hviezdnom čase, je preto potrebné sa od nultého poludníka posunúť o kúsok na západ na zemepisnú dĺžku

$$\lambda = \frac{6^\mathrm{h}\,27^\mathrm{m}\,18{,}76^\mathrm{s} - 6^\mathrm{h}\,20^\mathrm{m}\,40{,}536^\mathrm{s}}{24^\mathrm{h}}\cdot 360° = 1°39'33{,}36''\ \mathrm{W}\,. \tag{2.86}$$

(b) Postupujeme rovnakým spôsobom ako pri Mesiaci. Zemepisná šírka sa rovná deklinácii Slnka, $\varphi = \delta_\odot = 1°52'11{,}17''$ N. Slnko kulminuje pri hviezdnom čase $\theta = \alpha_\odot = 0^\mathrm{h}\,17^\mathrm{m}\,17{,}118^\mathrm{s}$. Zemepisná dĺžka je

$$\lambda = \frac{6^\mathrm{h}\,27^\mathrm{m}\,18{,}76^\mathrm{s} - 0^\mathrm{h}\,17^\mathrm{m}\,17{,}118^\mathrm{s}}{24^\mathrm{h}}\cdot 360° = 92°30'24{,}63''\ \mathrm{W}\,. \tag{2.87}$$

(c) Nazývajú sa sublunárny a subsolárny bod.

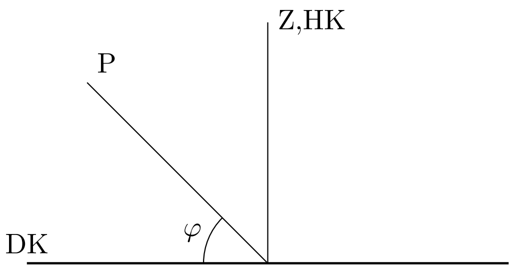
(d) Stačí iba dosadiť do vzorca zo zadania

$$\cos E = \sin 1°52'11{,}17'' \cdot \sin 28°21'24{,}59'' \\ + \cos 1°52'11{,}17'' \cdot \cos 28°21'24{,}59'' \cdot \cos\left[(6^{\mathrm{h}}\,20^{\mathrm{m}}\,40{,}536^{\mathrm{s}} - 0^{\mathrm{h}}\,17^{\mathrm{m}}\,17{,}118^{\mathrm{s}}) \cdot 15\right]. \quad (2.88)$$

Dostávame $E = 89°51'27{,}13''$, doplnok tohto uhla je $\delta = 90° - 89°51'27{,}13'' = 0°8'32{,}87''$. Pomer vzdialenosti Slnka a Mesiaca je

$$\frac{S}{L} = \cot\delta = \tan E = \tan 89°51'27{,}13'' = 402\,. \quad (2.89)$$

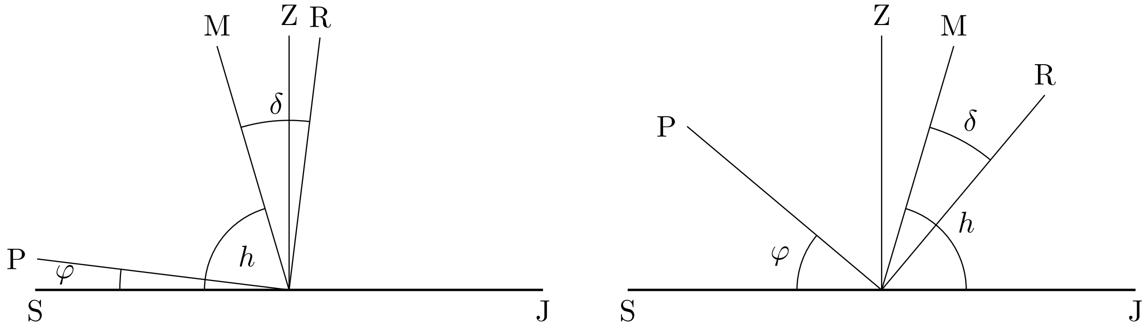
2.4.6 AO 2012, úloha 1 – Kulminácia hviezd – riešenie



Na severnej pologuli to nastane pre zemepisnú šírku $\varphi = 45°$ N a deklináciu $\delta = 45°$. Na južnej pologuli pre zemepisnú šírku $\varphi = 45°$ S a deklináciu $\delta = -45°$.

2.4.7 AO 2012, úloha 2 – riešenie

Pozorujeme zatmenie Mesiaca, to znamená, že Mesiac je v Splne a na nebeskej sfére sa nachádza presne oproti Slnku. 21. decembra je zimný slnovrat, Slnko má vtedy deklináciu približne $-23{,}5°$, Mesiac v splne má vtedy deklináciu $\delta = 23{,}5°$. Úloha má dve riešenia (viď obrázok), Mesiac kulminuje buď na sever od zenitu alebo na juh od zenitu.



Najskôr uvažujme prípad kulminácie na sever od zenitu. Pól je vzdialený 90° od rovníka. Podľa obrázku platí

$$\varphi + 90° = h + \delta\,. \tag{2.90}$$

Zemepisná šírka je

$$\varphi = h + \delta - 90° = 73{,}5° + 23{,}5° - 90° = 7°\,. \tag{2.91}$$

Ak Mesiac kulminuje na juh od zenitu, potom platí rovnosť

$$\varphi + 90° + h - \delta = 180°\,. \tag{2.92}$$

Zemepisná šírka je

$$\varphi = 90° - h + \delta = 90° - 73{,}5° + 23{,}5° = 40°\,. \tag{2.93}$$

V obidvoch prípadoch je pozorovateľ na severnej pologuli.

2.4.8 AO 2017, úloha 2 – riešenie

Najdlhšie úplné zatmenie nastane vo chvíli, kedy je Mesiac v perigeu, pretože zdanlivý uhlový priemer Mesiaca θ_p je vtedy najväčší. Naopak, uhlový priemer Mesiaca v apogeu θ_a je najmenší, preto vtedy nastane najdlhšie prstencové zatmenie. Zo zachovania momentu hybnosti dostaneme

$$r_\mathrm{p}^2\omega_\mathrm{p} = r_\mathrm{a}^2\omega_\mathrm{a} \tag{2.94}$$

kde $r_\mathrm{p} = a(1-e)$ je vzdialenosť Mesiaca od Zeme v perigeu a $r_\mathrm{a} = a(1+e)$ je vzdialenosť Mesiaca od Zeme v apogeu, ω_p a ω_a je uhlová rýchlosť Mesiaca v perigeu resp. apogeu. Ak zanedbáme pohyb Zeme okolo Slnka počas zatmenia (inak by bolo riešenie príkladu oveľa komplikovanejšie), tak je dĺžka trvania zatmenia v perigeu

$$t_\mathrm{p} = \frac{\theta_\mathrm{p} - \theta_\odot}{\omega_\mathrm{p}}\,, \tag{2.95}$$

kde $\theta_\odot$ je uhlový priemer Slnka. Dĺžka trvania zatmenia v apogeu je

$$t_\mathrm{a} = \frac{\theta_\odot - \theta_\mathrm{a}}{\omega_\mathrm{a}}\,. \tag{2.96}$$

Pre uhlové rýchlosti a priemery platia nasledujúce vzťahy

$$\frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega_\mathrm{a}} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2\,, \tag{2.97}$$

$$\theta_\mathrm{p} = \frac{2R_☾}{r_\mathrm{p}}\,, \tag{2.98}$$

$$\theta_\mathrm{a} = \frac{2R_☾}{r_\mathrm{a}}\,. \tag{2.99}$$

Výrazy pre časy zatmení podelíme

$$\frac{t_\mathrm{a}}{t_\mathrm{p}} = \frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega_\mathrm{a}}\frac{\theta_\odot - \theta_\mathrm{a}}{\theta_\mathrm{p} - \theta_\odot} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}\frac{\theta_\odot - \theta_\mathrm{a}}{\theta_\mathrm{p} - \theta_\odot}\,. \tag{2.100}$$

Kvôli prehľadnejším výpočtom zavedieme označenie

$$k := \frac{t_\mathrm{a}}{t_\mathrm{p}} \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}\,, \tag{2.101}$$

$$k = \frac{\theta_\odot - \theta_\mathrm{a}}{\theta_\mathrm{p} - \theta_\odot}\,, \tag{2.102}$$

$$k\theta_\mathrm{p} - k\theta_\odot = \theta_\odot - \theta_\mathrm{a}\,, \tag{2.103}$$

$$k\theta_\mathrm{p} + \theta_\mathrm{a} = \theta_\odot + k\theta_\odot = (1+k)\theta_\odot\,. \tag{2.104}$$

Pre uhlové priemery platí nasledujúci vzťah

$$\theta_\mathrm{a} = \frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}\theta_\mathrm{p} = \frac{1-e}{1+e}\theta_\mathrm{p}\,, \tag{2.105}$$

$$\theta_\odot = \left(k + \frac{1-e}{1+e}\right)\frac{\theta_\mathrm{p}}{1+k}\,. \tag{2.106}$$

Vypočítame číselnú hodnotu k

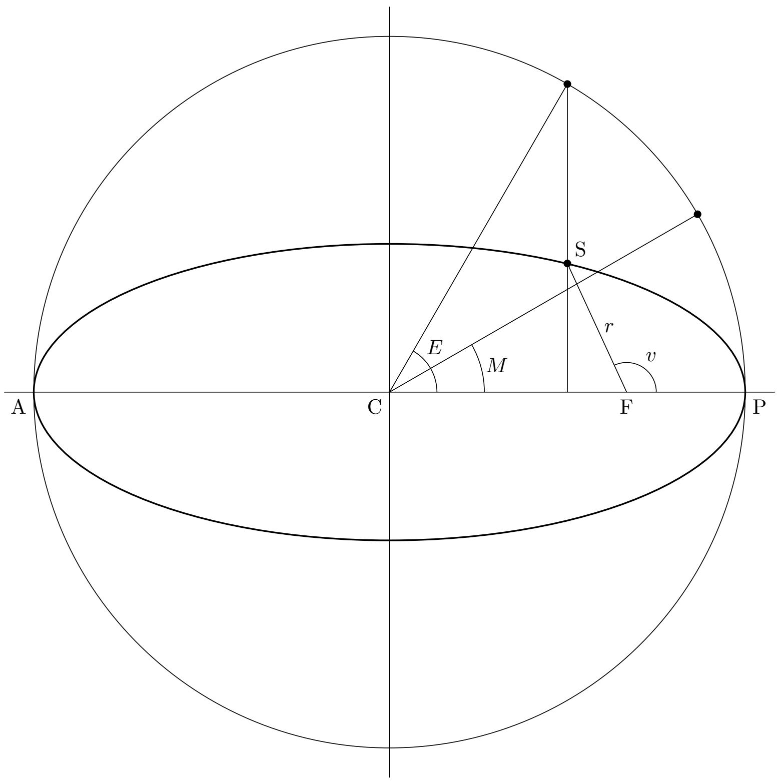
$$\frac{12{,}5}{7{,}5}\frac{(1-0{,}0549)^2}{(1+0{,}0549)^2} = 1{,}3378\,, \tag{2.107}$$

$$\theta_\odot = \left(1{,}3378 + \frac{1-0{,}0549}{1+0{,}0549}\right)\cdot\frac{\theta_\mathrm{p}}{1+1{,}3378} = 0{,}9555\theta_\mathrm{p}\,. \tag{2.108}$$

Hľadáme miesto na mesačnej dráhe, kde platí $\theta_☾ = \theta_\odot$, práve tam sa totiž nachádza hranica medzi prstencovými a úplnými zatmeniami. Využijeme pri tom rovnicu elipsy v polárnych súradniciach

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}\,, \tag{2.109}$$

kde v je pravá anomália. Na obrázku nižšie ja načrtnutý význam pravej aj excentrickej anomálie.



V mieste rovnosti slnečného a mesačného uhlového priemeru platí

$$r\theta_{\odot} = r_{\mathrm{p}}\theta_{\mathrm{p}}\,, \tag{2.110}$$

$$0{,}9555 r\theta_{\mathrm{p}} = r_{\mathrm{p}}\theta_{\mathrm{p}}\,. \tag{2.111}$$

Dosadíme za r do rovnice elipsy

$$\frac{r_{\mathrm{p}}}{0{,}9555} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}\,, \tag{2.112}$$

$$\frac{a(1-e)}{0{,}9555} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e\cos(v)}\,, \tag{2.113}$$

$$1+e\cos(v) = 0{,}9555(1+e)\,, \tag{2.114}$$

$$\cos(v) = \frac{0{,}9555\cdot(1+0{,}0549)-1}{0{,}0549}\,. \tag{2.115}$$

Uhlový priemer Mesiaca a Slnka sa rovnajú v momente, kedy je pravá anomália Mesiaca $v = 81{,}7°$. V okolí $81{,}7°$ na obidve strany od perigea dochádza k úplným zatmeniam, na zvyšku dráhy Mesiaca dochádza k prstencovým zatmeniam. Pomer počtu týchto dvoch typov zatmení, ktoré nastanú za dlhý časový úsek sa zhruba rovná pomeru časov, ktoré Mesiac strávi na príslušných úsekoch jeho dráhy (zatmenia môžu nastať v náhodných miestach dráhy Mesiaca). Na zistenie pomeru potrebujeme vypočítať koľko času uplynie, kým Mesiac prejde z perigea do miesta s $v = 81{,}7°$. Využijeme vzťah medzi pravou a excentricku anomáliou

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)\,. \tag{2.116}$$

Excentrická anomália v mieste s $v = 81{,}7°$ je

$$E = 2\cdot\arctan\left[\sqrt{\frac{1-0{,}0549}{1+0{,}0549}}\tan\left(\frac{81{,}7}{2}\right)\right] = 78{,}6°\,. \tag{2.117}$$

Strednú anomáliu vypočítame z Keplerovej rovnice, pričom si treba dať pozor na to, že je potrebné dosadiť hodnoty v radiánoch

$$M = E - e\sin E = \frac{78{,}6}{180}\cdot\pi - 0{,}0549\cdot\sin(78{,}6°) = 1{,}32\,\mathrm{rad} = 75{,}5°\,, \tag{2.118}$$

$$t = \frac{M}{360°}P_{☾} = \frac{75{,}5°}{360}\cdot 27{,}32 = 5{,}73\,\text{dní}\,. \tag{2.119}$$

Pomer počtu prstencových a úplných zatmení je

$$\frac{N_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{u}}} = \frac{P_{☾}-2t}{2t} = \frac{27{,}32-2\cdot 5{,}73}{2\cdot 5{,}73} = 1{,}3\,. \tag{2.120}$$

2.4.9 AO 2023, úloha 5 – Planetárny tranzit – riešenie

(a) V tejto úlohe musíme nájsť smer, v ktorom sa dráhy Uránu a Neptúnu pretínajú. Presné riešenie by si vyžadovalo sférickú trigonometriu, vďaka malým sklonom však môžeme postupovať aj nasledovne. Pre ekliptikálnu šírku planét β máme približne

$$\beta = i \sin(\lambda - \Omega)\,. \tag{2.121}$$

kde i je sklon dráhy, λ je ekliptikálna dĺžka a Ω je dĺžka výstupného uzla. Priesečník dráh sa nachádza v mieste, kde sa rovnajú ekliptikálne šírky oboch planét.

$$i_\mathrm{U} \sin(\lambda - \Omega_\mathrm{U}) = i_\mathrm{N} \sin(\lambda - \Omega_\mathrm{N})\,. \tag{2.122}$$

Využijeme vzorec pre sínus rozdielu uhlov

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y\,, \tag{2.123}$$

$$i_\mathrm{U}(\sin\lambda\cos\Omega_\mathrm{U} - \cos\lambda\sin\Omega_\mathrm{U}) = i_\mathrm{N}(\sin\lambda\cos\Omega_\mathrm{N} - \cos\lambda\sin\Omega_\mathrm{N})\,, \tag{2.124}$$

$$\sin\lambda(i_\mathrm{U}\cos\Omega_\mathrm{U} - i_\mathrm{N}\cos\Omega_\mathrm{N}) = \cos\lambda(i_\mathrm{U}\sin\Omega_\mathrm{U} - i_\mathrm{N}\sin\Omega_\mathrm{N})\,, \tag{2.125}$$

$$\tan\lambda = \frac{i_\mathrm{U}\sin\Omega_\mathrm{U} - i_\mathrm{N}\sin\Omega_\mathrm{N}}{i_\mathrm{U}\cos\Omega_\mathrm{U} - i_\mathrm{N}\cos\Omega_\mathrm{N}}\,, \tag{2.126}$$

$$\tan\lambda = \frac{0{,}773^\circ \cdot \sin(74^\circ) - 1{,}77^\circ \cdot \sin(131{,}8^\circ)}{0{,}773 \cdot \cos(74^\circ) - 1{,}77^\circ \cdot \cos(131{,}8^\circ)} = -0{,}414\,. \tag{2.127}$$

Existujú dve možné riešenia, $\lambda_1 = 157{,}5^\circ$ a $\lambda_2 = 337{,}5^\circ$. Tieto ekliptikálne dĺžky sú heliocentrické - merané z pohľadu Slnka. Obidve planéty sú ďaleko od Zeme, preto ich poloha z pohľadu Zeme bude veľmi podobná. Na základe ekliptikálnych dĺžok sa dá odhadnúť, že planéty sa budú nachádzať v súhvezdí Vodnár alebo Lev.

(b) Najskôr určíme uhlové priemery Slnka a Uránu pri pohľade z Neptúna. Pre Slnko máme

$$\theta_\odot = \frac{2R_\odot}{a_\mathrm{N}} = \frac{2 \cdot 6{,}955 \cdot 10^8}{30{,}07 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}} = 3{,}09 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} = 63{,}8''\,. \tag{2.128}$$

Uhlový priemer Uránu je

$$\theta_\mathrm{U} = \frac{2R_\mathrm{U}}{a_\mathrm{N} - a_\mathrm{U}} = \frac{2 \cdot 2{,}536 \cdot 10^7}{(30{,}07 - 19{,}19) \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}} = 3{,}12 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad} = 6{,}4''\,. \tag{2.129}$$

Pre pokles jasnosti Neptúnu si stačí uvedomiť, že jeho jasnosť poklesne rovnako, ako množstvo svetla, ktoré k nemu prichádza od Slnka. Pre pokles tak máme

$$\Delta m = 2{,}5 \log\left(\frac{\theta_\odot^2 - \theta_\mathrm{U}^2}{\theta_\odot^2}\right) = 2{,}5 \log\left(\frac{63{,}8^2 - 6{,}4^2}{63{,}8^2}\right) = -0{,}011\,. \tag{2.130}$$

(c) Dobu trvania určíme ako podiel uhlovej vzdialenosti, o ktorú sa pri pohľade z Neptúna musia Slnko a Urán vzájomne pohnúť pri centrálnom zákryte a uhlovej rýchlosti, ktorou sa voči sebe Urán a Slnko pri pohľade z Neptúna pohybujú

$$t_{14} = \frac{\theta_\odot + \theta_\mathrm{U}}{\omega_\odot + \omega_\mathrm{U}}\,, \tag{2.131}$$

$$t_{23} = \frac{\theta_\odot - \theta_\mathrm{U}}{\omega_\odot + \omega_\mathrm{U}}\,. \tag{2.132}$$

Uhlová rýchlosť Slnka voči Neptúnu je rovnaká ako uhlová rýchlosť Neptúnu voči Slnku

$$\omega_\odot = \frac{v_\mathrm{N}}{a_\mathrm{N}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\mathrm{N}^3}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{(30{,}07 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11})^3}} = 1{,}2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\,. \tag{2.133}$$

Uhlovú rýchlosť Uránu voči Neptúnu získame ako podiel vzájomnej rýchlosti Uránu a Neptúnu a ich vzdialenosti

$$\omega_\mathrm{U} = \frac{v_\mathrm{U} - v_\mathrm{N}}{a_\mathrm{N} - a_\mathrm{U}} \tag{2.134}$$

Obežné rýchlosti Uránu a Neptúnu sú

$$v_\mathrm{U} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\mathrm{U}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{19{,}19 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}} = 6798\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,, \tag{2.135}$$

$$v_\mathrm{N} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\mathrm{N}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{30{,}07 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}} = 5431\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{2.136}$$

Uhlová rýchlosť Uránu je teda

$$\omega_\mathrm{U} = \frac{6798 - 5431}{(30{,}07 - 19{,}19) \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}} = 8{,}4 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\,. \tag{2.137}$$

Dĺžka trvania maximálneho tranzitu je

$$t_{23} = \frac{63{,}8 - 6{,}4}{206\,265 \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-9} + 8{,}4 \cdot 10^{-10})} = 1{,}36 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 37{,}9\,\mathrm{h}\,. \tag{2.138}$$

Maximálny čas medzi 1. a 4. kontaktom je

$$t_{14} = \frac{63{,}8 + 6{,}4}{206\,265 \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-9} + 8{,}4 \cdot 10^{-10})} = 1{,}67 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 46{,}3\,\mathrm{h}\,. \tag{2.139}$$

Kapitola 3

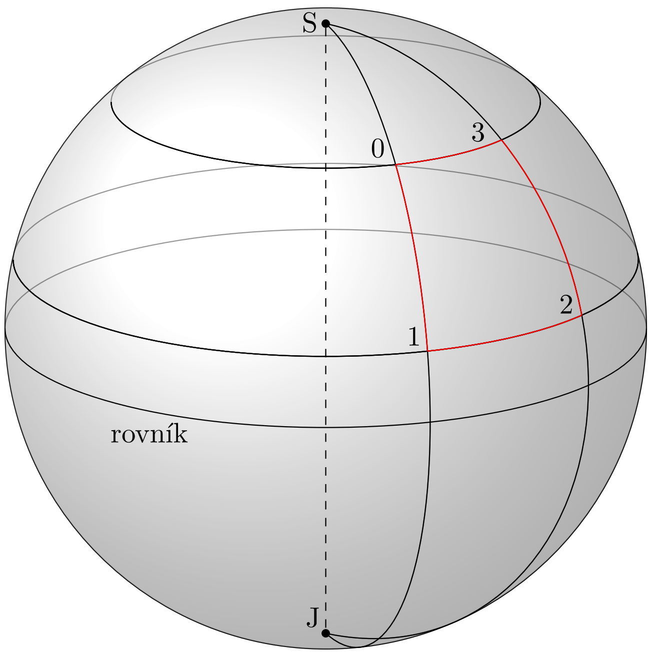
Sférická astronómia (riešenia)

3.1 Kategória ZŠ, domáce kolo – riešenia

3.1.1 AO 2014, úloha 3 – Navigácia lietadla I. – riešenie

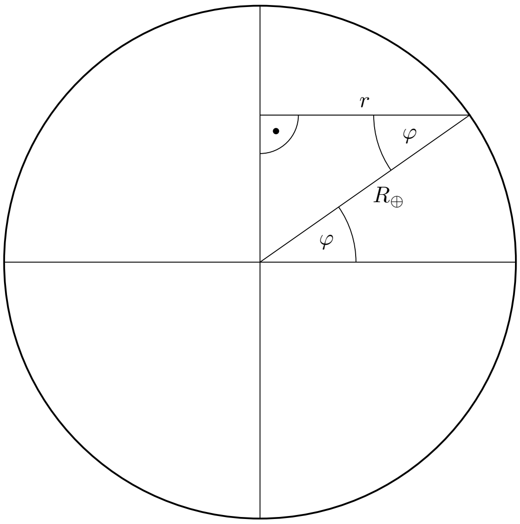
Dráha lietadla je nakreslená na obrázku. Súradnice bodu 0 (letiska Sliač) poznáme zo zadania. Zemepisná dĺžka bodu 1 je rovnaká ako zemepisná dĺžka bodu 0. Zemepisná šírka sa pri prelete z bodu 0 do bodu 1 zmení o

$$\Delta\varphi = \frac{3900}{2\pi R_\oplus} \cdot 360° = \frac{3900}{2\pi \cdot 6378} \cdot 360° = 35°2'6'' \,. \tag{3.1}$$



Zemepisná šírka bodov 1 a 2 bude $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 - \Delta\varphi = 48°38'17'' - 35°2'6'' = 13°36'11''$. Pri prelete z bodu 1 do bodu 2 sa lietadlo pohybuje po oblúku kružnice s polomerom $r_{12} = R_\oplus \cos\varphi_1$. Zemepisná dĺžka sa zmení o

$$\Delta\lambda = \frac{3900}{2\pi R_\oplus \cos\varphi_1} \cdot 360° = \frac{3900}{2\pi \cdot 6378 \cdot \cos 13°36'11''} \cdot 360° = 36°2'47'' \,. \tag{3.2}$$



Zemepisná dĺžka bodov 2 a 3 bude $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0 + \Delta\lambda = 19°8'3'' - 36°2'47'' = 55°10'50''$. Zemepisná šírka bodu 3 je $\varphi_3 = \varphi_0$. Pri pohybe z bodu 3 naspäť do bodu 0 lietadlo letí po oblúku kružnice s polomerom $r_{30} = R_\oplus \cos\varphi_0$. Prejde pri tom dráhu

$$d_{30} = \frac{\Delta\lambda}{360°} 2\pi R_\oplus \cos\varphi_0 = \frac{36°2'47''}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6378 \cos 48°38'17'' = 2651{,}6\,\mathrm{km}\,. \tag{3.3}$$

Celkovo lietadlo preletelo dráhu $d = 3 \cdot 3900 + 2651{,}6 = 14\,351{,}6\,\mathrm{km}$ a trvalo mu to

$$t = \frac{d}{v} = \frac{14351{,}6}{650} = 22\,\mathrm{h}\ 5\,\mathrm{min}\,. \tag{3.4}$$

3.2 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

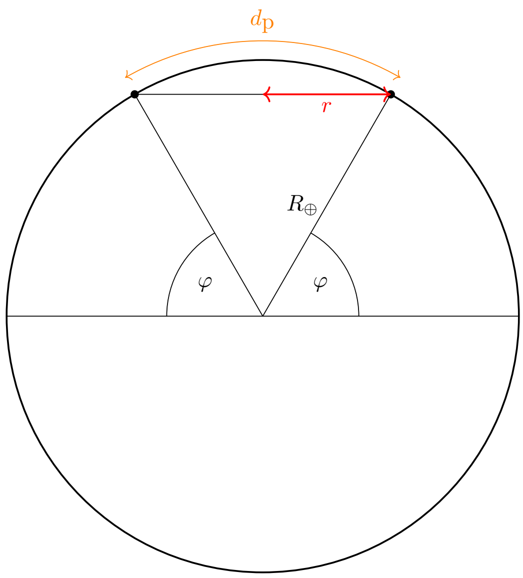
3.2.1 AO 2007, úloha 5 – riešenie

Obidve mestá sú vzdialené 30° od severného pólu. Ich vzájomná vzdialenosť meraná cez pól je

$$d_\mathrm{p} = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi R_\oplus = \frac{\pi \cdot 6378}{3} = 6679\,\mathrm{km}\,. \tag{3.5}$$

Rozdiel zemepisných dĺžok miest je 180°, takže ich vzdialenosť meraná po rovnobežke bude polovicou obvodu kružnice s polomerom $r = R_\oplus \cos\varphi$

$$d_\mathrm{r} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6378 \cdot \cos 60° = 10\,018\,\mathrm{km}\,. \tag{3.6}$$

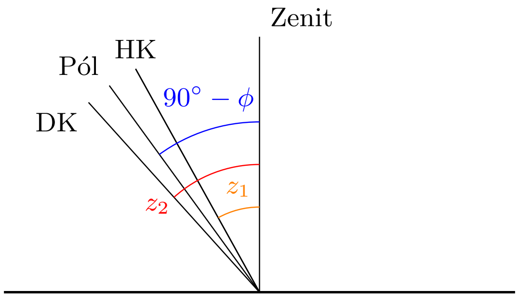


3.2.2 AO 2010, úloha 4 – Cirkumpolárna hviezda – riešenie

Výška hviezdy nad obzorom pri hornej kulminácii je $h_1 = 90° - z_1 = 90° - 29°47' = 60°13'$. Výška pri dolnej kulminácii je $h_2 = 90° - z_2 = 90° - 41°49' = 48°11'$. Pre zemepisnú šírku platí vzťah (viď obrázok)

$$90° - \varphi = \frac{z_1 + z_2}{2}\,, \tag{3.7}$$

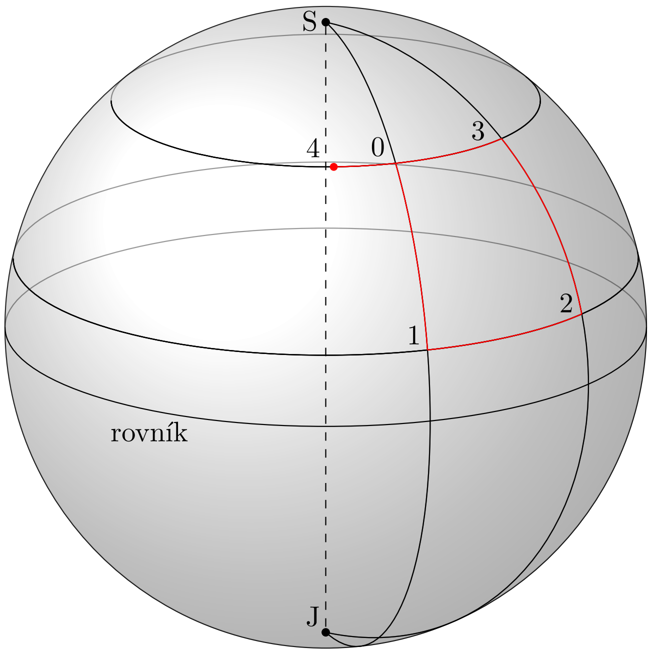
$$\varphi = 90° - \frac{z_1 + z_2}{2} = 90° - \frac{29°47' + 41°49'}{2} = 54°12'\,. \tag{3.8}$$



3.2.3 AO 2014, úloha 3 – Navigácia lietadla I. – riešenie

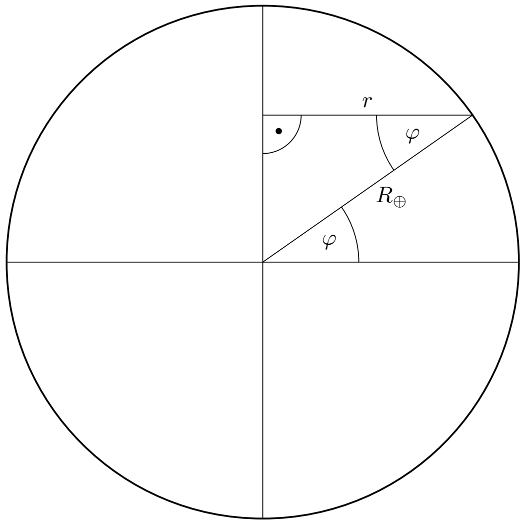
Dráha lietadla je nakreslená na obrázku. Súradnice bodu 0 (letiska Sliač) sú uvedené na stránke letiska: $\varphi_0 = 48°38'17''$ N a $\lambda_0 = 19°8'3''$ E. Za 6 hodín lietadlo preletí úsek dlhý $d = vt = 650 \cdot 6 = 3900\,\mathrm{km}$. Zemepisná dĺžka bodu 1 je rovnaká ako zemepisná dĺžka bodu 0. Zemepisná šírka sa pri prelete z bodu 0 do bodu 1 zmení o

$$\Delta\varphi = \frac{3900}{2\pi R_\oplus} \cdot 360° = \frac{3900}{2\pi \cdot 6378} \cdot 360° = 35°2'6''\,. \tag{3.9}$$



Zemepisná šírka bodov 1 a 2 bude $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 - \Delta\varphi = 48°38'17'' - 35°2'6'' = 13°36'11''$. Pri prelete z bodu 1 do bodu 2 sa lietadlo pohybuje po oblúku kružnice s polomerom $r_{12} = R_\oplus \cos\varphi_1$. Zemepisná dĺžka sa zmení o

$$\Delta\lambda_{12} = \frac{3900}{2\pi R_\oplus \cos\varphi_1} \cdot 360° = \frac{3900}{2\pi \cdot 6378 \cdot \cos 13°36'11''} \cdot 360° = 36°2'47''\,. \tag{3.10}$$



Zemepisná dĺžka bodov 2 a 3 bude $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0 + \Delta\lambda = 19°8'3'' - 36°2'47'' = 55°10'50''$. Zemepisná šírka bodov 3 a 4 je $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_0$. Pri pohybe z bodu 3 do bodu 4 lietadlo letí po oblúku kružnice s polomerom $r_{30} = R_\oplus \cos\varphi_0$. Rozdiel zemepisných dĺžok bodov 3 a 4 je

$$\Delta\lambda 34 = \frac{3900}{2\pi R_\oplus \cos\varphi_0} \cdot 360° = \frac{3900}{2\pi \cdot 6378 \cdot \cos 48°38'17''} \cdot 360° = 53°1'5''\,. \tag{3.11}$$

Zemepisná dĺžka bodu 4 bude $\lambda_4 = \lambda_3 - \Delta\lambda_{34} = 55°10'50'' - 53°1'5'' = 2°9'45''$.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{14351{,}6}{650} = 22\,\mathrm{h}\ 5\,\mathrm{min}\,. \tag{3.12}$$

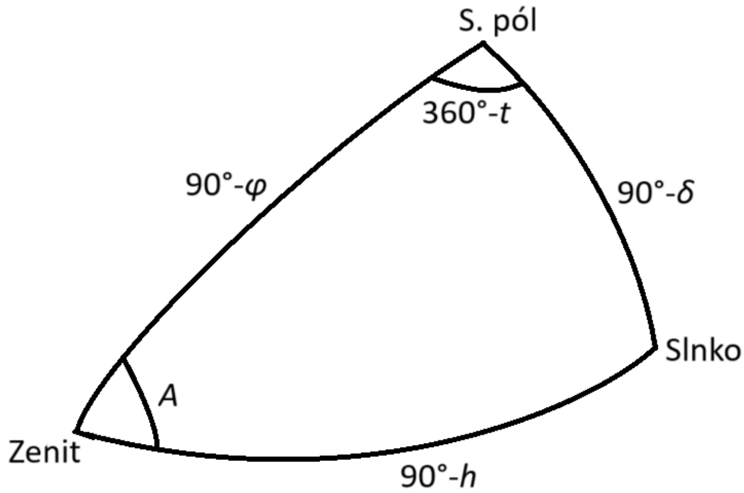
Súhrn súradníc všetkých bodov:

- $\varphi_0 = 48°38'17''$ N, $\lambda_0 = 19°8'3''$ E ,
- $\varphi_1 = 13°36'11''$ N, $\lambda_1 = 19°8'3''$ E ,
- $\varphi_2 = 13°36'11''$ N, $\lambda_2 = 55°10'50''$ E ,
- $\varphi_3 = 48°38'17''$ N, $\lambda_3 = 55°10'50''$ E ,
- $\varphi_4 = 48°38'17''$ N, $\lambda_4 = 2°9'45''$ E .

3.2.4 AO 2018, úloha 3 – Východ Slnka na Mesiaci – riešenie

V tomto zjednodušenom prípade sa rovina rovníka Mesiaca zhoduje s rovinou ekliptiky, preto je deklinácia Slnka $\delta = 0°$. Pri riešení budeme uvažovať azimut meraný od severu. Využijeme kosínusovú vetu pre sférický trojuholník.

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos\alpha\,. \tag{3.13}$$



Pre sférický trojuholník na obrázku platí

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi)\sin(90^\circ - \delta)\cos(360^\circ - t)\,. \tag{3.14}$$

Využijeme vzťahy medzi sínusom a kosínusom uhla: $\sin\beta = \cos(90^\circ - \beta)$, $\cos\beta = \sin(90^\circ - \beta)$ a nasledujúcu vlastnosť funkcie kosínus: $\cos\beta = \cos(360^\circ - \beta)$

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t\,. \tag{3.15}$$

Keďže deklinácia Slnka je nula, platí $\sin\delta = 0$ a $\cos\delta = 1$. Vzťah vyššie sa preto zjednoduší na

$$\sin h = \cos\varphi\cos t\,. \tag{3.16}$$

Východ Slnka začne v momente, keď sa horný okraj slnečného disku dotkne horizontu. Stred disku Slnka má v tej chvíli výšku $h_1 = -16'$, tomu zodpovedá hodinový uhol

$$\cos t_2 = \frac{\sin h_1}{\cos\varphi} = \frac{\sin -16'}{\cos 50^\circ}\,, \tag{3.17}$$

$$t_1 = -90^\circ 24' 53{,}5''\,. \tag{3.18}$$

Hodinový uhol berieme záporný, lebo Slnko sa nachádza na východ od meridiánu. Východ Slnka sa skončí vo chvíli, kedy sa disk Slnka dotýka horizontu svojím spodným okrajom. Výška stredu Slnka je vtedy $h_2 = 16'$ a hodinový uhol

$$\cos t_2 = \frac{\sin h_1}{\cos\varphi} = \frac{\sin 16'}{\cos 50^\circ}\,, \tag{3.19}$$

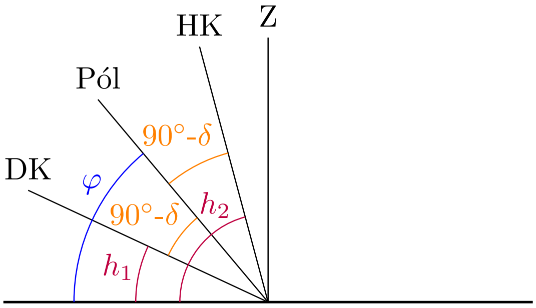
$$t_2 = -89^\circ 35' 6{,}5''\,. \tag{3.20}$$

Dĺžku trvania východu Slnka zistíme, ak prepočítame rozdiel v hodinových uhloch na časový rozdiel

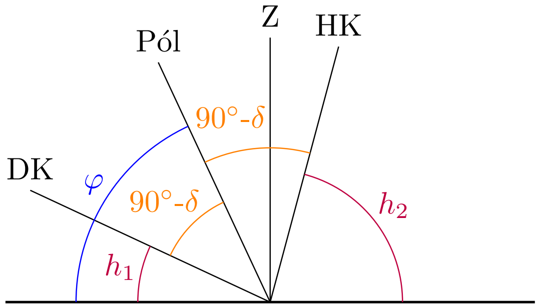
$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{360^\circ} T_{\mathrm{syn}} = \frac{-90^\circ 24' 53{,}5'' - (-89^\circ 35' 6{,}5'')}{360^\circ} \cdot 29{,}5306 = 0{,}068\,\text{dní} = 1\,\text{h}\ 38\,\text{min}\,. \tag{3.21}$$

3.2.5 AO 2021, úloha 6 – Sklon rotačnej osi planéty – riešenie

Úloha má dve riešenia, buď horná aj dolná kulminácia nastanú na rovnakej strane od zenitu alebo každá z nich na opačnej strane. Najskôr riešime prvý prípad.



1. prípad



2. prípad

Z obrázku vidíme, že medzi uhlami platia vzťahy

$$h_2 - h_1 = 2(90^\circ - \delta)\,, \tag{3.22}$$

$$\varphi = h_1 + 90^\circ - \delta\,. \tag{3.23}$$

Deklinácia Síria a „zemepisná šírka“ pozorovateľa sú

$$\delta = 90^\circ - \frac{h_2 - h_1}{2} = 90^\circ - \frac{75^\circ - 25^\circ}{2} = 65^\circ\,, \tag{3.24}$$

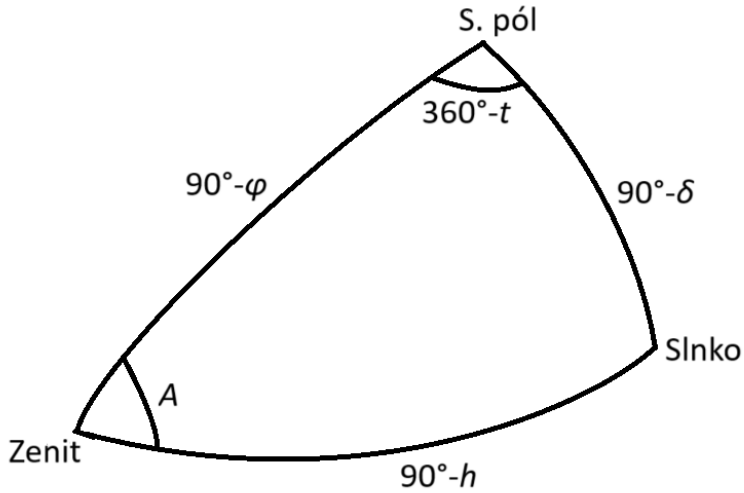
$$\varphi = 25^\circ + 90^\circ - 50^\circ\,. \tag{3.25}$$

Počas najdlhšieho dňa v roku má miestne Slnko najvyššiu možnú deklináciu, tá sa rovná práve sklonu ekliptiky voči rovníku. Najdlhší deň trvá 31 h, z toho polovica (od kulminácie po západ) je 15,5 h. Označíme si obežnú dobu $P_\mathrm{o} = 0{,}15 \cdot 365{,}25 \cdot 24 = 1314{,}9\,\mathrm{h}$, rotačnú dobu planéty $P_\mathrm{r} = 48\,\mathrm{h}$ a synodický deň T

$$T = \frac{1}{\frac{1}{P_\mathrm{r}} - \frac{1}{P_\mathrm{o}}} = \frac{P_\mathrm{r} P_\mathrm{o}}{P_\mathrm{o} - P_\mathrm{r}} = \frac{48 \cdot 1314{,}9}{1314{,}9 - 48} = 49{,}82\,\mathrm{h}\,. \tag{3.26}$$

Hodinový uhol pri západe Slnka je

$$t = \frac{15{,}5}{49{,}82} 360^\circ = 112^\circ\,. \tag{3.27}$$



Pre sférický trojuholník na obrázku použijeme kosínusovú vetu.

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t\,. \tag{3.28}$$

Pri západe slnka je jeho deklinácia nulová, $\delta_S = 0°$, rovnica vyššie sa preto zjednoduší na

$$\cos t = -\tan\varphi \tan\delta\,. \tag{3.29}$$

Ako sme spomínali vyššie, počas najdlhšieho dňa v roku platí $\delta_\mathrm{S} = \varepsilon$. Sklon ekliptiky voči rovníku je teda

$$\tan\varepsilon = -\frac{\cos t}{\tan\varphi} = -\frac{\cos 112°}{\tan 50}\,. \tag{3.30}$$

Vyjde $\varepsilon = 17{,}5°$.
V druhom prípade postupujeme rovnako. Medzi uhlami na obrázku platia vzťahy

$$h_1 + 2(90° - \delta) + h_2 = 180°\,, \tag{3.31}$$

$$\varphi = h_1 + 90° - \delta\,, \tag{3.32}$$

Dopočítame deklináciu Síria a zemepisnú šírku pozorovateľa

$$\delta = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{25° + 75°}{2} = 50°\,, \tag{3.33}$$

$$\varphi = 25° + 90° - 50° = 65°\,. \tag{3.34}$$

Sklon ekliptiky je v tomto prípade

$$\tan\varepsilon = -\frac{\cos t}{\tan\varphi} = -\frac{\cos 112°}{\tan 65}\,. \tag{3.35}$$

Teda $\varepsilon = 9{,}9°$.

3.3 Kategória SŠ, finále – riešenia

3.3.1 AO 2015, úloha 2 – riešenie

Spln nastal v blízkosti letného slnovratu, deklinácia Slnka je preto približne $\delta_\odot = 23°26'$. Mesiac v splne sa nachádza zhruba na opačnej strane nebeskej sféry v blízkosti deklinácie $-23°26'$. Vieme ale, že dráha Mesiaca je voči ekliptike sklonená o $i = 5{,}14°$, preto maximálna možná deklinácia Mesiaca je $\delta_1 = -23°26' + 5{,}14° = -18°17'36''$ a minimálna možná deklinácia je $\delta_{\min} = -23°26' - 5{,}14° = -28°34'24''$.
Využijeme vzťah pre hodinový uhol pri západe/východe

$$\cos t = -\tan\varphi \tan\delta\,. \tag{3.36}$$

Dvojnásobok hodinového uhla udáva čas, ktorý objekt strávi nad obzorom.

$$t_1 = \arccos(-\tan(-6°49'))\tan(-18°17'36'')) = 92°15'53''\,, \tag{3.37}$$

$$t_2 = \arccos(-\tan(-6°49'))\tan(-28°34'24'') = 93°44'58''\,. \tag{3.38}$$

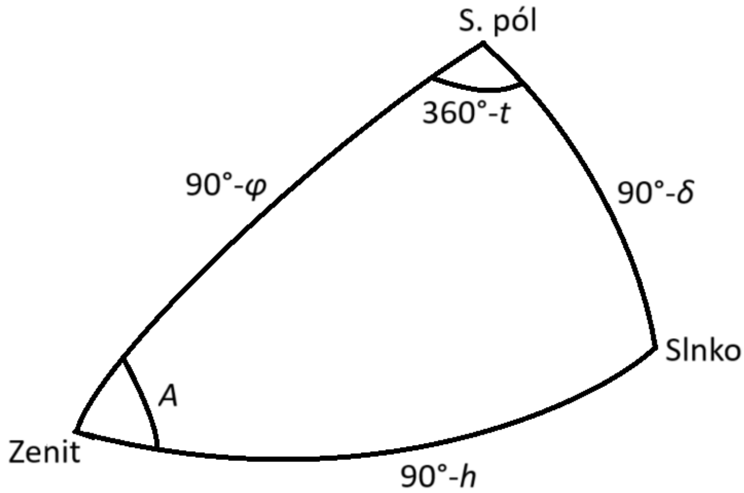
Zodpovedajúce časy sú $T_1 = 2t_1 = 12\,\mathrm{h}\ 18\,\mathrm{min}$ a $T_2 = 2t_2 = 12\,\mathrm{h}\ 30\,\mathrm{min}$. Na tieto dva časy je potrebné ešte urobiť niekoľko korekcií. Kvôli svojmu obehu okolo Zeme sa Mesiac za 1 deň posunie na oblohe v rektascenzii smerom na východ o $\frac{360°}{27{,}3217} = 13°10'35''$, to je $52^\mathrm{m}\ 43^\mathrm{s}$. Za 12,5 hodiny sa rektascenzia Mesiaca zmení o 27^m, časy zotrvania Mesiaca nad horizontom sú preto $T_1 = 12\,\mathrm{h}\ 45\,\mathrm{min}$ a $T_2 = 12\,\mathrm{h}\ 57\,\mathrm{min}$
Ďalej je potrebné zarátať refrakciu, ktorá je na horizonte približne 0,5°. Tento uhol prejde Mesiac za približne 2 minúty, celkovo sa tak ku časom T_1 a T_2 pripočítajú ešte 4 minúty (2 za východ a 2 za západ).
Tieto časy platia pre stred disku Mesiaca, ak chceme vedieť časy, kedy je Mesiac viditeľný aspoň časťou svojho disku, musíme urobiť ešte korekciu na uhlový rozmer Mesiaca. Uhlový polomer je približne 0,25°, horný okraj mesačného disku preto pri východe uvidíme o 1 minútu skôr ako jeho stred. Pri západe Mesiaca je situácia analogická, preto sú výsledné časy zotrvania Mesiaca na horizontom $T_1 = 12\,\mathrm{h}\ 45\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} + 2\,\mathrm{min} = 12\,\mathrm{h}\ 51\,\mathrm{min}$ a $T_1 = 12\,\mathrm{h}\ 57\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} + 2\,\mathrm{min} = 13\,\mathrm{h}\ 3\,\mathrm{min}$.

3.3.2 AO 2019, úloha 1 – riešenie

(a) Pri výpočte hodinového uhla hviezdy vyjdeme zo sférického trojuholníka. Ak si nakreslíme celú situáciu, tak môžeme pomocou kosínusovej vety pre sférický trojuholník dostať vzorec pre výšku pomocou deklinácie, zemepisnej šírky miesta a hodinového uhlu hviezdy ako

$$\sin h = \sin\varphi_1 \sin\delta + \cos\varphi_1 \cos\delta \cos t\,, \tag{3.39}$$

kde h je výška hviezdy v čase pozorovania.



Je jasné, že pre východ alebo západ hviezdy platí pre jej výšku $h = 0°$ ($\sin h = 0$). Preto sa vzťah vyššie reguluje len na

$$0 = \sin\varphi_1 \sin\delta + \cos\varphi_1 \cos\delta \cos t\,. \tag{3.40}$$

Odtiaľ úpravou dostávame vzťah pre hodinový uhol

$$t = \arccos(-\tan\varphi_1 \tan\delta)\,. \tag{3.41}$$

Táto rovnica má dve riešenia ($+t$, $-t$) a keďže sa jedná o východ hviezdy, tak hviezda ešte len bude kulminovať, čo znamená, že za riešenie berieme $-t$. Dosadením máme

$$t = \arccos(-\tan 48°11'20'' \tan 20°15') = -114°21'32{,}5'' = -7^{\mathrm{h}}\,37^{\mathrm{m}}\,26^{\mathrm{s}}\,. \tag{3.42}$$

Keďže hodinový uhol sa zvykne udávať v intervale 0 až 24^{h}, ako výslednú hodnotu berieme $t = 24^{\mathrm{h}} - 7^{\mathrm{h}}\,37^{\mathrm{m}}\,26^{\mathrm{s}} = 16^{\mathrm{h}}\,22^{\mathrm{m}}\,34^{\mathrm{s}}$.

(b) Keďže obaja pozorovatelia ležia takmer na rovnakej geografickej šírke, môžeme rozdiel časov $\Delta\tau$ vo východe oboch miest vypočítať ako rozdiel geografických dĺžok oboch miest a previesť na minúty. Keďže Michalovce sa nachádzajú východnejšie ako Galanta, musel pozorovateľ B vidieť hviezdu vychádzať skôr, preto pre rozdiel časov východu tej istej hviezdy $\Delta\tau$ v hodinách platí

$$\Delta\tau = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{15} = \frac{21°54'5'' - 17°43'35''}{15} = 0^{\mathrm{h}}\,16^{\mathrm{m}}\,42^{\mathrm{s}}\,. \tag{3.43}$$

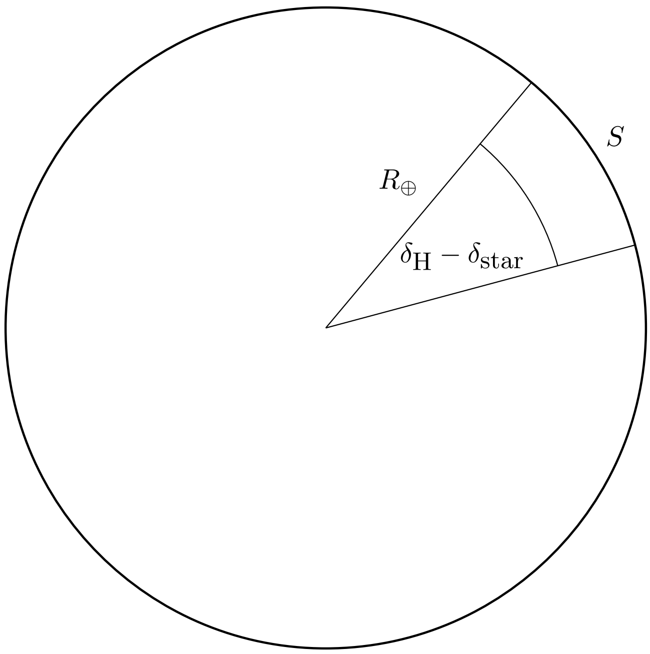
Takže čas východu hviezdy je asi $22^{\mathrm{h}}\,0^{\mathrm{m}}\,0^{\mathrm{s}} - 0^{\mathrm{h}}\,16^{\mathrm{m}}\,42^{\mathrm{s}} = 21^{\mathrm{h}}\,43^{\mathrm{m}}\,18^{\mathrm{s}}$.

(c) Na severnej pologuli platí pre deklináciu hviezdy, ktorú môže pozorovateľ sledovať vzťah

$$\delta_{\mathrm{star}} > \varphi_1 - 90°\,. \tag{3.44}$$

Teda po dosadení dostávame podmienku, že deklinácia hviezdy musí byť väčšia ako $\delta_{\mathrm{star}} = -41°48'40''$. Hadar má deklináciu $\delta_{\mathrm{H}} = -60°22'$, preto musí pozorovateľ vyrovnať tento rozdiel, teda musí sa dostať o $18°33'20''$ južnejšie ako sa nachádza, aby videl hviezdu pri ideálnom horizonte presne na horizonte. Pomocou obrázku nižšie dostaneme vzťah pre vzdialenosť na Zemskom povrchu

$$s = \frac{\delta_{\rm star} - \delta_{\rm H}}{360°} \cdot 2\pi R_{\oplus} = \frac{-41°48'40'' - -60°22'}{360°} \cdot 2\pi 6378\,. \tag{3.45}$$

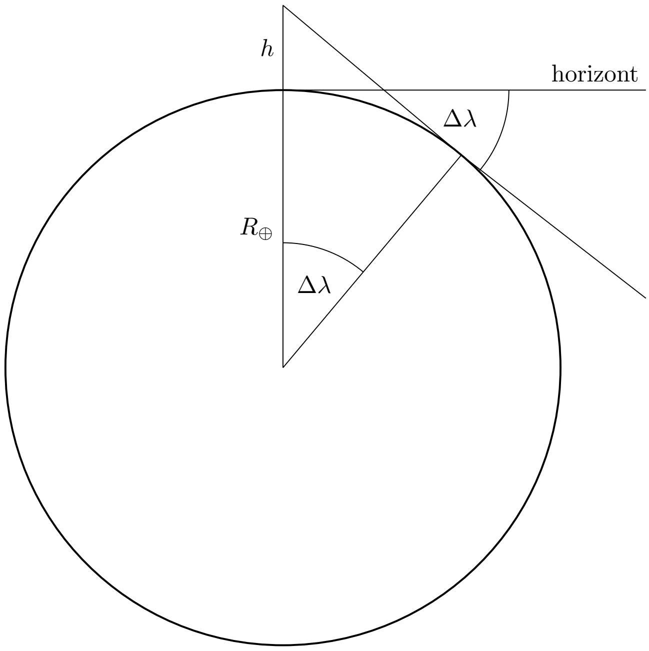


Čo sa týka pozorovateľa B tak tam zase platí podmienka, že deklinácia cirkumpolárnej hviezdy musí spĺňať

$$\delta_{\rm circ} > 90° - \varphi_1\,. \tag{3.46}$$

Dosadením deklinácie Denebu dostávame, že Deneb spĺňa túto podmienku, preto je pre pozorovateľa B cirkumpolárny.

(d) Vieme, že ak sa pozorovateľ nachádza v určitej výške nad Zemou je schopný vidieť istý uhol pod horizont a tento uhol je úmerný výške nad Zemou. Celú situáciu zobrazuje obrázok.



Označme výšku našej budovy ako h a rozdiel geografických dĺžok ako $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$. Ako je vidno z obrázku, o tento uhol musí vidieť pozorovateľ A nižšie pod obzor

$$\cos\Delta\lambda = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} . \tag{3.47}$$

Odtiaľ vieme vyjadriť výšku h ako

$$h = \frac{R_\oplus}{\cos\Delta\lambda} - R_\oplus = \frac{6378}{\cos(21°54'5'' - 17°43'35'')} - 6378 = 16{,}97\,\mathrm{km} . \tag{3.48}$$

(e) Občiansky súmrak nastáva, keď sa stred Slnka nachádza 6° pod horizontom. Je jasné, že dĺžka súmraku bude závisieť od deklinácie Slnka. Dĺžku súmraku T určíme ako rozdiel hodinových uhlov kedy je Slnko 6° pod horizontom (t_2) a kedy zapadá (t_1), teda

$$T = t_2 - t_1 . \tag{3.49}$$

Vieme, že deklinácia Slnka v deň letného slnovratu je približne $\delta_\odot = 23°26'$. Na základe toho môžeme podobne ako v časti a) určiť jeho hodinový uhol ako

$$t_1 = \arccos(-\tan\varphi_1 \tan\delta_\odot) = \arccos(-\tan 48°11'20'' \tan 23°26') = 118°59'4{,}8'' = 7^{\mathrm{h}}\,55^{\mathrm{m}}\,56^{\mathrm{s}} . \tag{3.50}$$

Pre hodinový uhol Slnka 6° pod obzorom máme, že výška Slnka musí byť $h = -6°$, teda z kosínusovej vety pre sférický trojuholník dostaneme vzťah pre hodinový uhol

$$t_2 = \arccos\left(\frac{\sin h - \sin\varphi_1 \sin\delta_\odot}{\cos\varphi_1 \cos\delta_\odot}\right) , \tag{3.51}$$

$$t_2 = \arccos\left(\frac{\sin(-6°) - \sin(48°11'20'')\sin(23°26')}{\cos(48°11'20'')\cos 23°26'}\right) = 130°57'16{,}2'' = 8^{\mathrm{h}}\,43^{\mathrm{m}}\,49^{\mathrm{s}} . \tag{3.52}$$

Dĺžka trvania občianskeho súmraku pri západe potom bude $T = 8^{\mathrm{h}}\,43^{\mathrm{m}}\,49^{\mathrm{s}} - 7^{\mathrm{h}}\,55^{\mathrm{m}}\,56^{\mathrm{s}} = 0^{\mathrm{h}}\,47^{\mathrm{m}}\,53^{\mathrm{s}}$.

(f) Dĺžka súmraku je uvedená v tabuľke, overenie prebehlo v `Stellariu`, no dá sa to ukázať aj zo vzťahov kde sa zohľadňuje refrakcia. V tomto príklade nám ale ide len o odhad a kvalitatívne popísanie. Vidíme, že odpoveď na prvú otázku je **DLHŠIA** a odpoveď na druhú otázku je **SKRÁTILA**.

Vysvetlenie 1: Pri letnom slnovrate Slnko opisuje väčšiu kružnicu na nebeskej sfére ako pri zimnom slnovrate a dá sa povedať, že ide voči horizontu pod menším uhlom, preto keďže pohyb po ekliptike počas jedného dňa je zhruba rovnomerný, tak mu trvá dlhší čas kým prejde do rovnakej výšky (resp. hĺbky) pod horizont.
Vysvetlenie 2: Dĺžka sa skráti, pretože refrakcia (hviezdy sú vyššie ako v skutočnosti) spôsobuje, že vidíme Slnko ešte nad obzorom (zdanlivo) napriek tomu, že jeho stred je už nejaký čas pod obzorom. Po západe Slnka už viacej nepozorujeme refrakciu a preto refrakcia nemá vplyv na čas kedy Slnko dosiahne výšku $-6°$. Výsledný efekt je taký, že uhol, ktorý Slnko musí prejsť nie je 6°, ale menej a to samozrejme trvá kratší čas.

Letný slnovrat – západ Slnka		Zimný slnovrat – západ Slnka	
Čas na horizonte bez atmosféry	Čas 6° pod obzorom bez atmosféry	Čas na horizonte bez atmosféry	Čas 6° pod obzorom bez atmosféry
20:47:03	21:34:57	15:51:38	16:34:27
Dĺžka súmraku $T = 47\,\mathrm{min}\ 54\,\mathrm{s}$		Dĺžka súmraku $T = 42\,\mathrm{min}\ 49\,\mathrm{s}$	
Čas na horizonte s atmosférou	Čas 6° pod obzorom s atmosférou	Čas na horizonte s atmosférou	Čas 6° pod obzorom s atmosférou
20:51:18	21:34:18	15:55:49	16:34:27
Dĺžka súmraku $T = 43\,\mathrm{min}\ 0\,\mathrm{s}$		Dĺžka súmraku $T = 38\,\mathrm{min}\ 38\,\mathrm{s}$	

Kapitola 4

Fotometria a spektroskopia (riešenia)

4.1 Kategória ZŠ, domáce kolo – riešenia

4.1.1 AO 2007, úloha 2 – riešenie

Tok energie na planétu je priamo úmerný ploche planéty, na ktorú dopadá, takže je priamo úmerný druhej mocnine polomeru planéty. Zároveň je nepriamo úmerný druhej mocnine vzdialenosti planéty od Slnka

$$F \sim \frac{R^2}{a^2}\,. \tag{4.1}$$

Pomer tokov energie na Mars a Jupiter je

$$\frac{F_{♂}}{F_{\mathrm{J}}} = \frac{R_{♂}^2 a_{\mathrm{J}}^2}{R_{\mathrm{J}}^2 a_{♂}^2}\,, \tag{4.2}$$

$$\frac{F_{♂}}{F_{\mathrm{J}}} = \frac{(3{,}393 \cdot 10^6)^2 \cdot 5{,}204^2}{(6{,}9911 \cdot 10^7)^2 \cdot 1{,}524^2} = 0{,}027\,. \tag{4.3}$$

Pomer tokov vyšiel menší ako 1, takže na Jupiter dopadá viac energie ako na Mars.

4.2 Kategória ZŠ, finále – riešenia

4.2.1 AO 2007, úloha 3 – riešenie

Vzdialenosť najskôr prepočítame zo svetelných rokov na parseky

$$d = \frac{8{,}6}{3{,}262} = 2{,}64\,\mathrm{pc}\,. \tag{4.4}$$

Zdanlivá magnitúda Slnka bude

$$m = M - 5 + 5\log d\,, \tag{4.5}$$

$$m = 4{,}82 - 5 + 5\cdot\log(2{,}64) = 1{,}93\,. \tag{4.6}$$

4.2.2 AO 2008, úloha 3 – Pulzujúca premenná hviezda – riešenie

Dosadíme do vzorca v zadaní a vypočítame absolútnu magnitúdu

$$M = -1{,}63 - 2{,}54\log P = -1{,}63 - 2{,}54\log(40) = -5{,}7\,. \tag{4.7}$$

Vzorec na výpočet absolútnej magnitúdy je

$$M = m + 5 - 5\log r\,. \tag{4.8}$$

Z toho vyjadríme vzdialenosť hviezdy

$$r = 10^{\frac{m+5-M}{5}} = 10^{\frac{4{,}2+5+5{,}7}{5}} = 955\,\mathrm{pc}\,. \tag{4.9}$$

4.2.3 AO 2009, úloha 2 – Solárna konštanta pre Mars – riešenie

Solárna konštanta je vlastne tok žiarenia v určitej vzdialenosti od Slnka. Tok na Marse sa vypočíta zo vzorca

$$F_{♂} = \frac{L_\odot}{4\pi a_{♂}^2}\,. \tag{4.10}$$

Svietivosť Slnka určíme z hodnoty solárnej konštanty, ktorú poznáme zo zadania

$$L = 4\pi a_\oplus^2 S\,. \tag{4.11}$$

Pre tok žiarenia na Mars dostaneme

$$F_{♂} = \frac{a_\oplus^2}{a_{♂}^2} S = \frac{1^2}{1{,}524^2}\cdot 1366 = 588\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{4.12}$$

4.2.4 AO 2013, úloha 2 – riešenie

Do vzorca pre magnitúdu je potrebné dosadiť vzdialenosť v parsekoch

$$m = M - 5 + 5\log r = 4{,}82 - 5 + 5\log\left(\frac{4{,}22}{3{,}262}\right) = 0{,}38\,. \tag{4.13}$$

4.2.5 AO 2014, úloha 1 – Slnko a lupa – riešenie

Vypočítame pomer toku Slnka a Mesiaca v splne

$$\frac{F_{\odot}}{F_{☾}} = 2{,}512^{m_{☾}-m_{\odot}} = 2{,}512^{-12{,}74+26{,}72} = 391\,000\,. \tag{4.14}$$

Na vypálenie stopy musí lupa od Mesiaca zachytiť rovnaký výkon ako od Slnka, na to potrebuje mať väčšiu plochu. Preto pre pomer polomerov lupy platí

$$\frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{F_{\odot}}{F_{☾}}\,. \tag{4.15}$$

Na vypálenie stopy svetlom Mesiaca by sme potrebovali lupu s priemerom

$$D_2 = \sqrt{\frac{F_{\odot}}{F_{☾}}}D_1 = \sqrt{391\,000}\cdot 0{,}02 = 12{,}5\,\mathrm{m}\,. \tag{4.16}$$

4.3 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

4.3.1 AO 2008, úloha 1 – riešenie

Svietivosť sa vypočíta zo vzorca

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \,. \tag{4.17}$$

Ak chceme svietivosť vyjadriť v jednotkách svietivosti Slnka, tak rovnicu vyššie stačí jednoducho vydeliť rovnicou na výpočet $L_\odot$

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{R^2 T^4}{R_\odot^2 T_\odot^4} \,, \tag{4.18}$$

$$L = 2{,}5^2 \cdot \left(\frac{7500}{5778}\right)^4 L_\odot = 17{,}7 L_\odot \,. \tag{4.19}$$

4.3.2 AO 2008, úloha 3 – riešenie

Využijeme vzťah medzi frekvenciou a vlnovou dĺžkou žiarenia

$$\lambda \nu = c \,. \tag{4.20}$$

a dosadíme za vlnové dĺžky do vzorca pre Dopplerov jav

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} c = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu_0}} c = \frac{\frac{\nu - \nu_0}{\nu \nu_0}}{\frac{1}{\nu_0}} c = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} c \,, \tag{4.21}$$

$$v = \frac{1420{,}406 - 1421{,}65}{1421{,}65} \cdot 2{,}99 \cdot 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}} = -261{,}6 \,\mathrm{km\,s^{-1}} \,. \tag{4.22}$$

Veľkosť rýchlosti je $261{,}6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, znamienko mínus znamená, že sa mračno pohybuje smerom k nám.

4.3.3 AO 2008, úloha 6 – riešenie

Najskôr pomocou Pogsonovej rovnice vypočítame absolútnu bolometrickú magnitúdu supernovy

$$M_{\mathrm{b}\odot} - M_\mathrm{b} = 2{,}5 \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \,, \tag{4.23}$$

$$M_b = 4{,}72 - 2{,}5 \log\left(10^{10}\right) = -20{,}28 \,. \tag{4.24}$$

Vzdialenosť supernovy dopočítame z nasledujúceho vzorca

$$M = m + 5 - 5 \log d \,, \tag{4.25}$$

$$d = 10^{\frac{m+5-M}{5}} \,. \tag{4.26}$$

Za m dosadíme zdanlivú bolometrickú magnitúdu Slnka $m_{\mathrm{b}\odot} = -26{,}82\,\mathrm{mag}$.

$$d = 10^{\frac{-26{,}82+5+20{,}28}{5}} = 10^{-0{,}308} = 0{,}49\,\mathrm{pc}\,. \tag{4.27}$$

4.3.4 AO 2008, úloha 7 – riešenie

Použijeme Wienov posunovací zákon

$$\lambda = \frac{b}{T}\,, \tag{4.28}$$

$$\lambda = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}}{4000} = 7{,}25 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 725\,\mathrm{nm}\,. \tag{4.29}$$

4.3.5 AO 2009, úloha 1 – riešenie

Tok svetla je priamo úmerný veľkosti povrchu, od ktorého sa odráža. Pogsonova rovnica má v tomto prípade tvar

$$m_{\mathrm{MS}} - m_{\mathrm{ISS}} = 2{,}5 \log\left(\frac{S_{\mathrm{ISS}}}{S_{\mathrm{MS}}}\right)\,, \tag{4.30}$$

$$S_{\mathrm{ISS}} = S_{\mathrm{MS}} \cdot 2{,}512^{m_{\mathrm{MS}}-m_{\mathrm{ISS}}}\,, \tag{4.31}$$

$$S_{\mathrm{ISS}} = 0{,}5 \cdot 2{,}512^{7{,}5+2{,}9} = 7230\,\mathrm{m}^2\,. \tag{4.32}$$

4.3.6 AO 2009, úloha 6 – Spektrum – riešenie

(a) Zmena vlnovej dĺžky je veľmi veľká, preto použijeme relativistický vzťah pre Dopplerov jav. Najskôr vypočítame červený posun

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}\,, \tag{4.33}$$

$$z = \frac{550 - 279{,}8}{279{,}8} = 0{,}966\,. \tag{4.34}$$

Rýchlosť objektu je

$$v = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} c\,, \tag{4.35}$$

$$v = \frac{1{,}966^2 - 1}{1{,}966^2 + 1} \cdot 2{,}99 \cdot 10^8 = 1{,}76 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 1{,}76 \cdot 10^5\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{4.36}$$

(b) Vzdialenosť objektu získame z Hubblovho zákona

$$r = \frac{v}{H_0}\,, \tag{4.37}$$

$$r = \frac{1{,}76 \cdot 10^5}{73} = 2410\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{4.38}$$

(c) Dopplerov jav: zmena vlnovej dĺžky, respektíve frekvencie, zachytenej pozorovateľom voči vlnovej dĺžke, respektíve frekvencii, vysielanej zdrojom. Zmena je zapríčinená vzájomným pohybom pozorovateľa a zdroja.
Hubble-Lemaîtrov zákon: radiálna rýchlosť galaxií určená z ich kozmologického červeného posunu je priamo úmerná ich vzdialenosti od pozorovateľa.

4.3.7 AO 2010, úloha 1 – Jazero – riešenie

Energia zachytená jazerom je priamo úmerná času, slnečnej konštante, priepustnosti atmosféry a efektívnej ploche jazera, na ktorú dopadá svetlo zo Slnka. Ak by Slnko bolo v zenite, slnečné lúče by na jazero dopadali kolmo a efektívna plocha jazera by bola rovnaká ako jeho skutočná plocha, teda $1\,\mathrm{km}^2$. Ak by Slnko bolo na horizonte, jeho lúče by sa šírili rovnobežne s hladinou jazera, ktoré by tak nezachytilo žiadnu slnečnú energiu. Pre ľubovoľnú výšku Slnka nad obzorom sa efetívna plocha jazera vypočíta ako

$$A_{\mathrm{eff}} = A \sin h \,. \tag{4.39}$$

Energia prijatá jazerom je

$$E = xSA \sin ht \,, \tag{4.40}$$

$$E = 1366 \cdot 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 60 \cdot \sin 30^\circ = 3{,}28 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}\,. \tag{4.41}$$

4.3.8 AO 2010, úloha 3 – Deneb – riešenie

Magnitúdu Denebu vo vzdialenosti Síria vypočítame z Pogsonovej rovnice

$$m_2 = m_1 + 2{,}5 \log\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) , \tag{4.42}$$

$$m_2 = 1{,}25 + 2{,}5 \log\left(\frac{2{,}64^2}{433^2}\right) = -9{,}82\,. \tag{4.43}$$

Deneb by bol slabší ako Mesiac v splne o približne 3 magnitúdy.

4.3.9 AO 2011, úloha 4 – riešenie

(a) Tok žiarenia zo Slnka vo vzdialenosti r od Slnka sa vypočíta zo vzťahu

$$F = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} = \frac{R^2 \sigma T^4}{r^2}\,. \tag{4.44}$$

Vypočítame vzdialenosť, v ktorej sa tok bude rovnať slnečnej konštante.

$$r = \sqrt{\frac{R^2 \sigma T^4}{S}}\,, \tag{4.45}$$

$$r = \sqrt{\frac{(1{,}2\cdot 10^{11})^2\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 3000^4}{1366}} = 6{,}96\cdot 10^{12}\,\mathrm{m} = 46{,}5\,\mathrm{au}\,. \tag{4.46}$$

Najbližšou planétou bude Neptún ($a = 30{,}178\,\mathrm{au}$), ale aj naň bude dopadať oveľa väčší tok slnečného žiarenia ako dopadá v súčasnosti na Zem.
(b) Uhlový priemer Slnka v radiánoch je

$$\theta \approx \frac{2R}{a_\mathrm{N}}\,, \tag{4.47}$$

$$\theta \approx \frac{2\cdot 1{,}2\cdot 10^{11}}{30{,}178\cdot 1{,}496\cdot 10^{11}} = 0{,}053\,\mathrm{rad} = 3^\circ\,. \tag{4.48}$$

4.3.10 AO 2012, úloha 1 – riešenie

Využijeme verziu Pogsonovej rovnice, ktorá platí pre žiarivé výkony a absolútne bolometrické magnitúdy hviezd

$$M_{\mathrm{b},\odot} - M_\mathrm{b} = 2{,}5\log\frac{L}{L_\odot}\,. \tag{4.49}$$

Žiarivé výkony hviezdy a Slnka vyjadríme pomocou ich polomeru a teploty

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4\,. \tag{4.50}$$

Konštanty sa pokrátia a výsledný vzťah absolútnu bolometrickú magnitúdu hviezdy je

$$M_\mathrm{b} = M_{\mathrm{b},\odot} - 2{,}5\log\frac{R^2T^4}{R_\odot^2 T_\odot^4}\,. \tag{4.51}$$

4.3.11 AO 2012, úloha 3 – riešenie

Najskôr vypočítame, koľkokrát jasnejšia je jedna hviezda 0-tej magnitúdy ako hviezda 10,5-tej magnitúdy.

$$\frac{I_1}{I_2} = 2{,}512^{m_2-m_1}\,, \tag{4.52}$$

$$\frac{I_0}{I_{10,5}} = 2{,}512^{10{,}5-0} = 15856\,, \tag{4.53}$$

Potrebný počet hviezd 0-tej magnitúdy je

$$N = \frac{400000}{15856} \approx 25\,. \tag{4.54}$$

4.3.12 AO 2013, úloha 4 – riešenie

Pogsonova rovnica pre absolútne bolometrické magnitúdy a žiarivé výkony je

$$M_1 - M_2 = 2{,}5\log\frac{L_2}{L_1}\,. \tag{4.55}$$

Polomer hviezdy sa nemení, takže pomer žiarivých výkonov sa rovná pomeru štvrtých mocnín teplôt hviezdy. Po dosadení teplôt do Pogsonovej rovnice dostaneme postupnými úpravami výraz pre zmenu teploty hviezdy.

$$M_1 - M_2 = 2{,}5 \log \frac{T_2^4}{T_1^4} = 2{,}5 \log \frac{(T_1 + \Delta T)^4}{T_1^4} = 10 \log \frac{T_1 + \Delta T}{T_1}\,, \tag{4.56}$$

$$\frac{T_1 + \Delta T}{T_1} = 1 + \frac{\Delta T}{T_1} = 10^{\frac{M_1 - M_2}{10}}\,, \tag{4.57}$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = 10^{0{,}05} - 1 = 0{,}122\,, \tag{4.58}$$

$$\Delta T = 0{,}122 T_1 = 0{,}122 \cdot 10000 = 1220\,\mathrm{K}\,. \tag{4.59}$$

4.3.13 AO 2016, úl. 2 – Tepelné rozšírenie spektrál. čiary – riešenie

Rozšírenie čiary sa vypočíta podľa vzorca

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,. \tag{4.60}$$

Potrebujeme vypočítať hmotnosť atómu vápnika.

$$m_{\mathrm{Ca}} = A_{\mathrm{Ca}} m_{\mathrm{u}} = 40{,}078 \cdot 1{,}68 \cdot 10^{-27} = 6{,}65 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}\,. \tag{4.61}$$

Zmena šírky čiary pre jednotlivé teploty je

$$\Delta\lambda_1 = \frac{2 \cdot 393{,}4 \cdot 10^{-9}}{2{,}99 \cdot 10^8}\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 3000}{6{,}65 \cdot 10^{-26}}} = 2{,}9 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 0{,}0029\,\mathrm{nm}\,, \tag{4.62}$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{2 \cdot 393{,}4 \cdot 10^{-9}}{2{,}99 \cdot 10^8}\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 6000}{6{,}65 \cdot 10^{-26}}} = 4{,}2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 0{,}0042\,\mathrm{nm}\,, \tag{4.63}$$

$$\Delta\lambda_1 = \frac{2 \cdot 393{,}4 \cdot 10^{-9}}{2{,}99 \cdot 10^8}\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 9000}{6{,}65 \cdot 10^{-26}}} = 5{,}1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 0{,}0051\,\mathrm{nm}\,. \tag{4.64}$$

4.3.14 AO 2016, úloha 4 – Deneb – riešenie

Magnitúda Denebu vo vzdialenosti Síria je

$$m_2 = m_1 + 2{,}5 \log\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)\,, \tag{4.65}$$

$$m_2 = 1{,}25 + 2{,}5 \log\left(\frac{8{,}6_2^2}{1530_1^2}\right) = -10\,. \tag{4.66}$$

Tvrdenie nie je správne, Mesiac v splne by bol jasnejší.

4.3.15 AO 2017, úloha 2 – Oscilácie hviezdy v galaxii – riešenie

Zo vzťahu pre absolútnu magnitúdu si vyjadríme vzdialenosť hviezdy.

$$M_{\mathrm{app}} = m + 5 - 5\log r\,, \tag{4.67}$$

$$r = 10^{\frac{m+5-M_{\mathrm{app}}}{5}}\,. \tag{4.68}$$

Amplitúda oscilácií je polovica rozdielu medzi najväčšou a najmenšou vzdialenosťou hviezdy.

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min}) = \frac{1}{2}\left(10^{\frac{m_{\max}+5-M_{\mathrm{app}}}{5}} - 10^{\frac{m_{\min}+5-M_{\mathrm{app}}}{5}}\right)\,. \tag{4.69}$$

4.3.16 AO 2018, úloha 1 – Celková jasnosť hviezd – riešenie

Vypočítame, koľkokrát jasnejšia je jedna hviezda s magnitúdou -0,15 ako hviezda 10,5-tej magnitúdy.

$$\frac{I_1}{I_2} = 2{,}512^{m_2-m_1}\,, \tag{4.70}$$

$$\frac{I_{-0{,}15}}{I_{10{,}5}} = 2{,}512^{10{,}5+0{,}15} = 18206\,. \tag{4.71}$$

Potrebný počet hviezd s magnitúdou -0,15 je

$$N = \frac{546000}{18206} = 30\,. \tag{4.72}$$

4.3.17 AO 2018, úloha 2 – Heliograf – riešenie

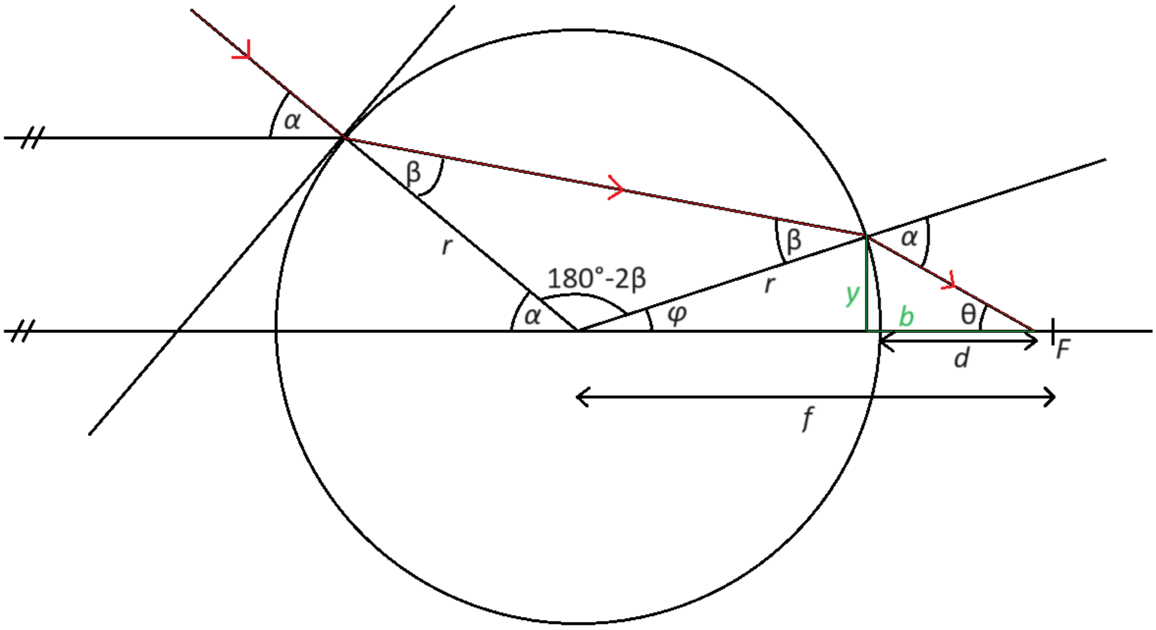
Ohniskovú vzdialenosť sklenenej gule môžeme vypočítať z rovnice pre hrubé šošovky

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n}\frac{h}{r_1 r_2}\right)\,. \tag{4.73}$$

kde n je index lomu, r_1 a r_2 sú polomery krivosti prednej a zadnej guľovej plochy a h je hrúbka šošovky. V našom prípade máme $n = 1{,}5$, $h = 10\,\mathrm{cm}$ a $r_1 = r_2 = 5\,\mathrm{cm}$. Dosadíme do rovnice hrubej šošovky

$$\frac{1}{f} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1{,}5-1}{1{,}5}\frac{10}{5\cdot 5}\right)\,. \tag{4.74}$$

Dostávame ohniskovú vzdialenosť $f = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. Lúče, ktoré sú pri vstupe rovnobežné s optickou osou, by sa mali pretnúť v ohnisku, kde je umiestnený papierik, do ktorého vypaľujú stopu. Vzdialenosť papierika od gule je $d = f - r = 7{,}5 - 5 = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Do tejto vzdialenosti sa ale dostanú iba lúče, ktoré sú veľmi blízko optickej osi, ostatné lúče pretnú optickú os v menšej vzdialenosti d'. Teraz ukážeme, že naozaj platí $d' < d$. Využijeme pri tom obrázok, kde si nakreslíme prechod svetelného lúča cez guľu.



Snellov zákon nám dáva vzťah medzi uhlami α a β

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,. \tag{4.75}$$

Využijeme, že dráha lúča vnútri gule tvorí spolu s polomermi gule rovnoramenný trojuholník. Preto je lúč pred výstupom z gule pod uhlom β voči kolmici na povrch gule a po výstupe z gule sa kvôli Snellovmu zákonu zlomí tak, že bude voči kolmici sklonený pod uhlom α. Z obrázka ďalej vyplývajú nasledujúce vzťahy pre uhly

$$\alpha + \varphi = 2\beta\,, \tag{4.76}$$

$$\theta = \alpha - \varphi\,, \tag{4.77}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}\,, \tag{4.78}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{b}\,, \tag{4.79}$$

$$r\cos\varphi + b = r + d'\,. \tag{4.80}$$

Vyjadríme z toho závislosť vzdialenosti pretnutia optickej osi d na uhle dopadu α

$$d' = r\cos\varphi + b - r = r\cos(2\beta-\alpha) + \frac{y}{\tan\theta} - r = r\cos(2\beta-\alpha) + \frac{r\sin\varphi}{\tan(\alpha-\varphi)} - r\,, \tag{4.81}$$

$$d' = r\left[\cos(2\beta-\alpha) + \frac{\sin(2\beta-\alpha)}{\tan(2\alpha-2\beta)}\right]. \tag{4.82}$$

Uhol β je

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right). \tag{4.83}$$

Napríklad pre uhol $\alpha = 5°$ dostaneme $d' = 2{,}47\,\mathrm{cm}$ a pre uhol $\alpha = 20°$ dostaneme $d' = 2{,}3\,\mathrm{cm}$. Pre vyššie hodnoty uhla α by sme dostali menšie hodnoty vzdialenosti d'. Zároveň pre rozličné hodnoty uhla vychádzajú rozličné vzdialenosti, z toho vyplýva, že obrazom Slnka je machuľa. Ak predpokladáme, že šošovka sústredí všetky svetelné lúče do stopy, tak na stopu dopadá výkon zachytený celou guľou, teda

$$P = k\pi r^2 = 1370 \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 = 10{,}8\,\mathrm{W}\,. \tag{4.84}$$

Tok energie, ktorý dopadá na stopu je

$$F = \frac{P}{\pi\frac{D^2}{4}} = \frac{4 \cdot 10{,}8}{\pi \cdot 0{,}001^2} = 1{,}37 \cdot 10^7\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{4.85}$$

4.3.18 AO 2019, úloha 1 – Exoplanéta a hviezda – riešenie

(a) Žiarivý výkon hviezdy je

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4\,, \tag{4.86}$$

$$L = 4\pi \cdot 0{,}38^2 \cdot (6{,}955 \cdot 10^8)^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2500^4 = 1{,}94 \cdot 10^{24}\,\mathrm{W}\,, \tag{4.87}$$

$$\frac{L}{L_\odot} = 0{,}38^2 \cdot \left(\frac{2500}{5778}\right)^4 = 5{,}06 \cdot 10^{-3}\,. \tag{4.88}$$

(b) Tok žiarenia dopadajúci na exoplanétu je

$$F = \frac{L}{4\pi a^2}\,, \tag{4.89}$$

$$F = \frac{1{,}94 \cdot 10^{24}}{4\pi \cdot 0{,}073^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} = 1294\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{4.90}$$

Porovnanie so slnečnou konštantou

$$\frac{F}{S} = \frac{L}{L_\odot}\frac{a_\oplus^2}{a^2}\,, \tag{4.91}$$

$$\frac{F}{S} = 5{,}06 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{0{,}073^2} = 0{,}95\,. \tag{4.92}$$

4.3.19 AO 2020, úloha 4 – Družica HIPPARCOS – riešenie

Vzorec pre absolútnu magnitúdu, ak uvažujeme aj medzihviezdnu absorpciu je

$$M = m + 5 - 5\log r - ar\,. \tag{4.93}$$

Vzdialenosť v pc sa vypočíta ako prevrátená hodnota paralaxy v uhlových sekundách

$$r = \frac{1}{\pi}\,. \tag{4.94}$$

Absolútna magnitúda je

$$M = m + 5 + 5\log\pi - \frac{a}{\pi}\,, \tag{4.95}$$

$$M = 8 + 5 + 5\log 0{,}0025 - \frac{0{,}005}{0{,}0025} = -2{,}01\,. \tag{4.96}$$

4.4 Kategória SŠ, finále – riešenia

4.4.1 AO 2007, úloha 1 – riešenie

(a) Žiarivý výkon hviezdy je

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4\,, \tag{4.97}$$

$$L = 4\pi \cdot 0{,}38^2 \cdot (6{,}955 \cdot 10^8)^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2500^4 = 1{,}94 \cdot 10^{24}\,\mathrm{W}\,, \tag{4.98}$$

$$\frac{L}{L_\odot} = 0{,}38^2 \cdot \left(\frac{2500}{5778}\right)^4 = 5{,}06 \cdot 10^{-3}\,. \tag{4.99}$$

(b) Tok žiarenia dopadajúci na exoplanétu je

$$F = \frac{L}{4\pi a^2}\,, \tag{4.100}$$

$$F = \frac{1{,}94 \cdot 10^{24}}{4\pi \cdot 0{,}073^2 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} = 1294\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{4.101}$$

Porovnanie so slnečnou konštantou

$$\frac{F}{S} = \frac{L}{L_\odot}\frac{a_\oplus^2}{a^2}\,, \tag{4.102}$$

$$\frac{F}{S} = 5{,}06 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{0{,}073^2} = 0{,}95\,. \tag{4.103}$$

4.4.2 AO 2007, úloha 4 – riešenie

Maximálna nameraná radiálna rýchlosť je

$$v_\mathrm{r} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c\,, \tag{4.104}$$

$$v_\mathrm{r} = \frac{0{,}75}{3933{,}6} 2{,}99 \cdot 10^8 = 57 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 57\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{4.105}$$

Červený posun je symetrický na obidve strany od laboratórnej vlnovej dĺžky čiary. To znamená, že sa hmotný stred sústavy voči pozorovateľovi nehýbe. Dráhová rýchlosť hviezdy v premietnutá do roviny zorného lúča sa rovná maximálnej hodnote nameranej radiálnej rýchlosti. Ako vidno na obrázku, platí

$$v = \frac{v_\mathrm{r}}{\cos\alpha}\,, \tag{4.106}$$

$$\frac{57}{\cos 30^\circ} = 65{,}8\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{4.107}$$

4.4.3 AO 2007, úloha 5 – riešenie

Vzorec pre absolútnu magnitúdu, ak uvažujeme aj medzihviezdnu absorpciu je

$$M = m + 5 - 5\log r - ar\,. \tag{4.108}$$

Vzdialenosť v pc sa vypočíta ako prevrátená hodnota paralaxy v uhlových sekundách

$$r = \frac{1}{\pi}\,. \tag{4.109}$$

Absolútna magnitúda je

$$M = m + 5 + 5\log\pi - \frac{a}{\pi}\,, \tag{4.110}$$

$$M = 8 + 5 + 5\log 0{,}0025 - \frac{0{,}005}{0{,}0025} = -2{,}01\,. \tag{4.111}$$

4.4.4 AO 2007, úloha 6 – riešenie

Vypočítame, koľkokrát jasnejšia je jedna hviezda s magnitúdou -0,15 ako hviezda 10,5-tej magnitúdy.

$$\frac{I_1}{I_2} = 2{,}512^{m_2-m_1}\,, \tag{4.112}$$

$$\frac{I_{-0,15}}{I_{10,5}} = 2{,}512^{10,5+0,15} = 18206\,. \tag{4.113}$$

Potrebný počet hviezd s magnitúdou -0,15 je

$$N = \frac{546000}{18206} = 30\,. \tag{4.114}$$

4.4.5 AO 2007, úloha 8 – riešenie

Vyjdeme zo vzťahu pre slnečnú konštantu, teda tok slnečného žiarenia vo vzdialenosti 1 au od Slnka

$$S = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} = \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi a_\oplus^2}\,, \tag{4.115}$$

$$T_\odot = \sqrt[4]{\frac{S a_\oplus^2}{R_\odot^2 \sigma}}\,, \tag{4.116}$$

$$T_\odot = \sqrt[4]{\frac{1366 \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2}{(6{,}955 \cdot 10^8)^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} = 5778\,\mathrm{K}\,. \tag{4.117}$$

4.4.6 AO 2009, úloha 2 – Rovnaký žiarivý výkon – riešenie

(a) Vieme, že tok žiarenia ubúda so štvorcom vzdialenosti. Ak jednu hviezdu pozorujeme ako 100-krát slabšiu, tak je vzdialenosť bude $\sqrt{100} = 10$-krát väčšia.

(b) Biela hviezda má vyššiu efektívnu teplotu ako červená. Keďže obidve majú rovnakú svietivosť, červená hviezda musí byť väčšia ako biela.

(c) Kvôli medzihviezdnej absorpcii sa ku nám od hviezdy dostane menej žiarenia, preto nameriame vyššiu hodnotu zdanlivej magnitúdy m (na rozdiel od prípadu bez absorpcie). Absolútna magnitúda M sa dá určiť napríklad z vlastností spektra hviezdy, ktoré medzihviezdna absorpcia neovplyvní, takže neovplyvní ani hodnotu M. Ak použijeme na výpočet vzdialenosti r bežný vzťah vychádzajúci z modulu vzdialenosti

$$M = m + 5 - 5\log r\,, \tag{4.118}$$

tak dostaneme väčšiu vzdialenosť, než je jej skutočná hodnota. Túto rovnicu je potrebné korigovať na absorpciu. Najjednoduchšia možná podoba korekcie uvažuje konštantný absorpčný koeficient α a vyzerá takto

$$M = m + 5 - 5\log r - \alpha r\,. \tag{4.119}$$

4.4.7 AO 2011, úloha 1 – riešenie

Najskôr vypočítame pomer jasností primáru a sekundáru

$$\frac{I_1}{I_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1} = 2{,}512^{2{,}85-1{,}99} = 2{,}21\,. \tag{4.120}$$

Z Pogsonovej rovnice pre sekundár a celú dvojhviezdu dostaneme celkovú magnitúdu dvojhviezdy

$$m_2 - m = 2{,}5\log\left(\frac{I}{I_2}\right) = 2{,}5\log\left(\frac{I_1 + I_2}{I_2}\right) = 2{,}5\log\left(\frac{3{,}21 I_2}{I_2}\right)\,, \tag{4.121}$$

$$m = m_2 - 2{,}5\log(3{,}21) = 2{,}85 - 2{,}5\log(3{,}21) = 1{,}58\,\mathrm{mag}\,. \tag{4.122}$$

4.4.8 AO 2012, úloha 3 – riešenie

Pre pomer jasností v sekundárnom minime a mimo neho platí

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{\pi(R_1^2 - R_2^2)\sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4}{\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4}\,. \tag{4.123}$$

Dosadíme to do Pogsonovej rovnice

$$\Delta m = 2{,}5\log\left[\frac{(R_1^2 - R_2^2)T_1^4 + R_2^2 T_2^4}{R_1^2 T_1^4 + R_2^2 T_2^4}\right] = 2{,}5\log\left[\frac{(2^2 - 1^2)\cdot 10\,000^4 + 1^2 \cdot 6000^4}{2^2 \cdot 10\,000^4 + 1^2 \cdot 6000^4}\right] = -0{,}3\,. \tag{4.124}$$

4.4.9 AO 2012, úloha 4 – riešenie

Využijeme verziu Pogsonovej rovnice, ktorá platí pre žiarivé výkony a absolútne bolometrické magnitúdy hviezd

$$M_{\mathrm{b},\odot} - M_{\mathrm{b}} = 2{,}5 \log \frac{L}{L_\odot} . \tag{4.125}$$

Žiarivé výkony hviezdy a Slnka vyjadríme pomocou ich polomeru a teploty

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 . \tag{4.126}$$

Konštanty sa pokrátia a výsledný vzťah absolútnu bolometrickú magnitúdu hviezdy je

$$M_{\mathrm{b}} = M_{\mathrm{b},\odot} - 2{,}5 \log \frac{R^2 T^4}{R_\odot^2 T_\odot^4} . \tag{4.127}$$

4.4.10 AO 2013, úloha 2 – riešenie

Pretože družica má 100 % odrazivosť, všetko svetlo, ktoré na ňu dopadne zo Slnka odrazí k pozorovateľovi. V tom prípade pomer jasností družice aj Slnka závisí iba na pomere priestorových uhlov, pod ktorými družicu aj Slnko vidíme. Uhlové rozmery panelu sú

$$\alpha = \frac{2}{800 \cdot 10^3} \cdot 206\,265 = 0{,}52'' , \tag{4.128}$$

$$\beta = \frac{1}{800 \cdot 10^3} \cdot 206\,265 = 0{,}26'' . \tag{4.129}$$

Priestorový uhol, pod ktorým pozorovateľ na Zemi vidí jeden panel Irídia je $\Omega_{\mathrm{I}} = \alpha\beta$. Uhlový polomer Slnka je

$$\vartheta_\odot = \frac{6{,}955 \cdot 10^8}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \cdot 206\,265 = 959'' . \tag{4.130}$$

Priestorový uhol, pod ktorým je vidieť slnečný disk je $\Omega_\odot = \pi\vartheta^2$ Magnitúdu záblesku Irídia vypočítame z Pogsonovej rovnice

$$m_{\mathrm{I}} = m_\odot + 2{,}5 \log \left(\frac{I_\odot}{I_{\mathrm{I}}} \right) = m_\odot + 2{,}5 \log \left(\frac{\Omega_\odot}{\Omega_{\mathrm{I}}} \right) , \tag{4.131}$$

$$m_{\mathrm{I}} = -26{,}72 + 2{,}5 \log \left(\frac{2{,}89 \cdot 10^6}{0{,}135} \right) = -8{,}4 . \tag{4.132}$$

4.4.11 AO 2013, úloha 4 – riešenie

Chceme nájsť vlnovú dĺžku, pre ktorú platí rovnosť

$$4\pi R_{\mathrm{A}}^2 I(\lambda, T_{\mathrm{A}}) = 4\pi R_{\mathrm{B}}^2 I(\lambda, T_{\mathrm{B}}) , \tag{4.133}$$

$$R_{\mathrm{A}}^2 \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(\frac{-hc}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{A}} \lambda} \right) = R_{\mathrm{B}}^2 \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(\frac{-hc}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{B}} \lambda} \right) , \tag{4.134}$$

$$R_\mathrm{A}^2 \exp\left(\frac{-hc}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{A}\lambda}\right) = R_\mathrm{B}^2 \exp\left(\frac{-hc}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{B}\lambda}\right) , \tag{4.135}$$

$$\exp\left[\frac{hc}{k_\mathrm{B}\lambda}\left(\frac{1}{T_\mathrm{B}} - \frac{1}{T_\mathrm{A}}\right)\right] = \frac{R_\mathrm{B}^2}{R_\mathrm{A}^2} , \tag{4.136}$$

$$\exp\left(\frac{hc}{k_\mathrm{B}\lambda}\frac{T_\mathrm{A} - T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}\right) = \frac{R_\mathrm{B}^2}{R_\mathrm{A}^2} , \tag{4.137}$$

$$2\ln\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}} = \frac{hc}{k_\mathrm{B}\lambda}\frac{T_\mathrm{A} - T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}T_\mathrm{B}} , \tag{4.138}$$

$$\lambda = \frac{hc}{2k_\mathrm{B}}\frac{T_\mathrm{A} - T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}\frac{1}{\ln\left(\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}\right)} , \tag{4.139}$$

$$\lambda = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23}} \cdot \frac{10\,000 - 30\,000}{10\,000 \cdot 30\,000} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{100}\right)} = 1{,}04 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 104\,\mathrm{nm} . \tag{4.140}$$

4.4.12 AO 2014, úloha 1 – Zákrytová dvojhviezda – riešenie

(a) Magnitúda červeného obra je $m_\mathrm{M} = m_\mathrm{S} - 0{,}7 = 7{,}4$. Vzdialenosť sústavy vypočítame z magnitúd červeného obra

$$r = 10^{\frac{m_\mathrm{M} + 5 - M_\mathrm{M}}{5}} = 10^{\frac{7{,}4+5+4}{5}} = 1905\,\mathrm{pc} . \tag{4.141}$$

(b) Z Pogsonovej rovnice pre červeného obra a celú dvojhviezdu vypočítame pomer jasností hviezd, z neho potom získame magnitúdu teplejšej hviezdy

$$m_\mathrm{M} - m_\mathrm{S} = 2{,}5\log\left(\frac{I_\mathrm{B} + I_\mathrm{M}}{I_\mathrm{M}}\right) = 2{,}5\log\left(\frac{I_\mathrm{B}}{I_\mathrm{M}} + 1\right) , \tag{4.142}$$

$$\frac{I_\mathrm{B}}{I_\mathrm{M}} = 2{,}512^{m_\mathrm{M} - m_\mathrm{S}} - 1 = 2{,}512^{0{,}7} - 1 = 0{,}91 , \tag{4.143}$$

$$m_\mathrm{B} = m_\mathrm{M} - 2{,}5\log\left(\frac{I_\mathrm{B}}{I_\mathrm{M}}\right) = 7{,}4 - 2{,}5\log(0{,}91) = 7{,}5 . \tag{4.144}$$

(c) Absolútnu magnitúdu teplejšej zložky vypočítame vďaka známej vzdialenosti dvojhviezdy

$$M_\mathrm{B} = m_\mathrm{B} + 5 - 5\log r = 7{,}5 + 5 - 5\log(1905) = -3{,}9 . \tag{4.145}$$

4.4.13 AO 2014, úloha 2 – Nestabilný asteroid – riešenie

Pri výpočte použijeme niekoľko predpokladov: pôvodný asteroid aj štyri nové útvary majú guľový tvar, rovnakú hustotu a rovnakú odrazivosť a po zrážke sa všetok materiál z pôvodného asteroidu zoskupil do štyroch nových a nič neuniklo preč. V tom prípade zo zachovania hmotnosti dostaneme vzťah medzi pôvodným polomerom R_1 a novými polomermi R_2

$$\frac{4}{3}\pi R_1^3\rho = 4\frac{4}{3}\pi R_2^3\rho , \tag{4.146}$$

$$R_1 = \sqrt[3]{4}R_2\,. \tag{4.147}$$

Intenzita svetla závisí iba na odrazovej ploche asteroidov, pre pomer intenzít preto platí

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{2R_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2\,. \tag{4.148}$$

Z Pogsonovej rovnice získame rozdiel magnitúd

$$m_2 - m_1 = 2{,}5\log\frac{I_1}{I_2} = 5\log\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) = -0{,}5\,. \tag{4.149}$$

Asteoid po rozpade zjasní o 0,5 mag.

4.4.14 AO 2015, úloha 4 – riešenie

Svietivosť Slnka je

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4\,. \tag{4.150}$$

Do vzdialenosti 1 au od Slnka dopadá tok

$$F = \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi x^2}\,. \tag{4.151}$$

Výkon, ktorý zachytí Zem je

$$P_1 = t_1 \pi R_\oplus^2 F = \frac{R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{x^2} t_1 \pi R_\oplus^2\,. \tag{4.152}$$

Výkon, ktorý Zem vyžiari je

$$P_2 = t_2 4\pi R_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4\,. \tag{4.153}$$

Teplotu Zeme zistíme z rovnosti prijatého a vyžiareného množstva energie $P_1 = P_2$

$$\frac{R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{x^2} t_1 \pi R_\oplus^2 = t_2 4\pi R_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4\,, \tag{4.154}$$

$$T_\oplus^4 = \frac{R_\odot^2 T_\odot^4 t_1}{4 t_2 x^2}\,, \tag{4.155}$$

$$T_\oplus = \sqrt{\frac{R_\odot}{2x}\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}}T_\odot\,. \tag{4.156}$$

4.4.15 AO 2017, úloha 1 – riešenie

Keďže magnitúdy primáru a sekundáru sa líšia presne o 1, vieme, že pre pomer ich jasností platí

$$\frac{I_1}{I_2} = 2{,}512\,. \tag{4.157}$$

Z Pogsonovej rovnice pre sekundár a celú dvojhviezdu dostaneme celkovú magnitúdu dvojhviezdy

$$m_2 - m = 2{,}5\log\left(\frac{I}{I_2}\right) = 2{,}5\log\left(\frac{I_1 + I_2}{I_2}\right) = 2{,}5\log\left(\frac{3{,}512 I_2}{I_2}\right)\,, \tag{4.158}$$

$$m = m_2 - 2{,}5\log(3{,}512) = 2 - 2{,}5\log(3{,}512) = 0{,}64\,\mathrm{mag}\,. \tag{4.159}$$

4.4.16 AO 2018, úloha 3 – Sírius – riešenie

(a)

$$M_\mathrm{V} = m_\mathrm{V} + 5 - 5\log r = 8{,}44 + 5 - 5\log(2{,}64) = 11{,}33\,\mathrm{mag}\,. \tag{4.160}$$

(b)

$$M_\mathrm{bol} = M_\mathrm{V} + BC = 11{,}33 - 2{,}73 = 8{,}6\,\mathrm{mag}\,. \tag{4.161}$$

(c)

$$M_{\mathrm{bol},\odot} - M_\mathrm{bol} = 2{,}5\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)\,, \tag{4.162}$$

$$M_{\mathrm{bol},\odot} = M_{\mathrm{V},\odot} + BC_\odot\,, \tag{4.163}$$

$$L = 2{,}512^{M_{\mathrm{V},\odot}+BC_\odot-M_\mathrm{bol}}L_\odot = 2{,}512^{4{,}82-0{,}1-8{,}6}\cdot 3{,}826\cdot 10^{26} = 1{,}07\cdot 10^{25}\,\mathrm{W}\,, \tag{4.164}$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{1{,}07\cdot 10^{25}}{4\pi\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8} 25\,200^4}} = 6{,}1\cdot 10^6\,\mathrm{m} = 6100\,\mathrm{km}\,. \tag{4.165}$$

(d)

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\,, \tag{4.166}$$

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3\cdot 1{,}018\cdot 1{,}9891\cdot 10^{30}}{4\pi\cdot(6{,}1\cdot 10^6)^3} = 2{,}13\cdot 10^9\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{4.167}$$

4.4.17 AO 2019, úloha 2 – riešenie

(a) Najskôr si vypíšeme základné fyzikálne jednotky, v ktorých sú jednotlivé konštanty vyjadrené. Podľa nich si potom vytvoríme sústavu lineárnych rovníc

$$[\sigma] = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}\,K^{-4}} = 1\,\mathrm{kg\,s^{-3}\,K^{-4}}\,, \tag{4.168}$$

$$[k_\mathrm{B}] = 1\,\mathrm{J\,K^{-1}} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}}\,, \tag{4.169}$$

$$[h] = 1\,\mathrm{J\,s} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}\,, \tag{4.170}$$

$$[c] = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{4.171}$$

Využili sme, že pre jednotku 1 J platí

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}\,. \tag{4.172}$$

Toto tvrdenie sa dá jednoducho overiť, ak sa pozrieme na vzorec pre kinetickú energiu $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, kde vľavo je energia v jouloch a vpravo je hmotnosť v kilogramoch a rýchlosť v metroch za sekundu umocnená na druhú. Sústava lineárnych rovníc je

$$\mathrm{kg:}\;\; 1 = \alpha - \beta\,, \tag{4.173}$$

$$\mathrm{m}: \ 0 = 2\alpha - 2\beta - \gamma\,, \tag{4.174}$$

$$\mathrm{s}: \ -3 = -2\alpha + \beta + \gamma\,, \tag{4.175}$$

$$\mathrm{K}: \ -4 = -\alpha\,. \tag{4.176}$$

Riešením sústavy sú koeficienty $\alpha = 4$, $\beta = 3$ a $\gamma = 2$. Vzorec pre Stefanovu-Boltzmanovu konštantu je

$$\sigma = A\frac{k_\mathrm{B}^4}{h^3c^2}\,. \tag{4.177}$$

Hodnota bezrozmernej konštanty A je

$$A = \frac{\sigma h^3 c^2}{k_\mathrm{B}^4} = \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (6{,}626 \cdot 10^{-34})^3 \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^2}{(1{,}381 \cdot 10^{-23})^4} = 40{,}76\,. \tag{4.178}$$

(b) Rayleighov-Jeansov bol v zadaní zámerne napísaný navyše a pri riešení úlohy nebol potrebný. Zachytená energia sa dá jednoducho odhadnúť ako

$$E_1 = S_{1660}\pi\frac{D^2}{4}t\Delta f\,, \tag{4.179}$$

$$E_1 = 0{,}21 \cdot 10^{-26} \cdot \pi \cdot \frac{200^2}{4} \cdot 8 \cdot 3600 \cdot 100 \cdot 10^6 = 1{,}9 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}\,. \tag{4.180}$$

(b) Solárny panel zachytí energiu

$$E_2 = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}\eta S\Delta t\,, \tag{4.181}$$

$$E_2 = \frac{3{,}826 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} \cdot 0{,}054 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 60 = 22\,000\,\mathrm{J}\,. \tag{4.182}$$

Pomer energií je

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{22\,000}{1{,}9 \cdot 10^{-10}} = 1{,}2 \cdot 10^{14}\,. \tag{4.183}$$

Solárny panel teda zachytí $1{,}2 \cdot 10^{14}$-krát viac energie ako rádioteleskop.

4.4.18 AO 2021, úloha 3 – Zrkadlová Zem – riešenie

(a) Svietivosť je množstvo energie, ktorá opustí Slnko za 1 sekundu. A to do všetkých smerov rovnomerne. Keďže sa energia vo vesmíre nestráca, na sféru s polomerom $a_\oplus$ dopadne takisto $L_\odot$ energie za sekundu. Preto na $1\,\mathrm{m}^2$ tejto sféry, čo je zároveň aj $1\,\mathrm{m}^2$ povrchu zrkadla, dopadne tok

$$F = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} = \frac{3{,}826 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} = 1360\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{4.184}$$

(b) Najskôr si treba uvedomiť, že Zem prijíma energiu plochou prierezu. Druhá dôležitá vec je, že 98% energie sa odrazí preč, násobíme $(1-k)$. Celkový výkon bude F-krát plocha prierezu

$$P_{\oplus} = F(1-k)S_{\mathrm{p}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2}\pi R_{\oplus}^2(1-k) = \frac{1-k}{4}L_{\odot}\left(\frac{R_{\oplus}}{a_{\oplus}}\right)^2 , \tag{4.185}$$

$$P_{\oplus} = \frac{1-0{,}98}{4}\cdot 3{,}826\cdot 10^{26}\left(\frac{6378}{1{,}496\cdot 10^8}\right)^2 = 3{,}48\cdot 10^{15}\,\mathrm{W}\,. \tag{4.186}$$

(c) To, že Zem považujeme za absolútne čierne teleso znamená, že žiari podľa Stefan-Boltzmannovho zákona: $F_{\oplus} = \sigma T_{\oplus}^4$.
Energiu, ktorú Zem prijme prierezom, vyžiari celým povrchom: $L_{\oplus} = P_{\oplus}$.

$$T_{\oplus} = \sqrt[4]{\frac{F_{\oplus}}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{L_{\oplus}}{4\pi\sigma R_{\oplus}^2}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\oplus}}{4\pi\sigma R_{\oplus}^2}} = \sqrt[4]{\frac{(1-k)L_{\odot}\left(\frac{r_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^2}\right)}{4\cdot 4\pi\sigma R_{\oplus}^2}} , \tag{4.187}$$

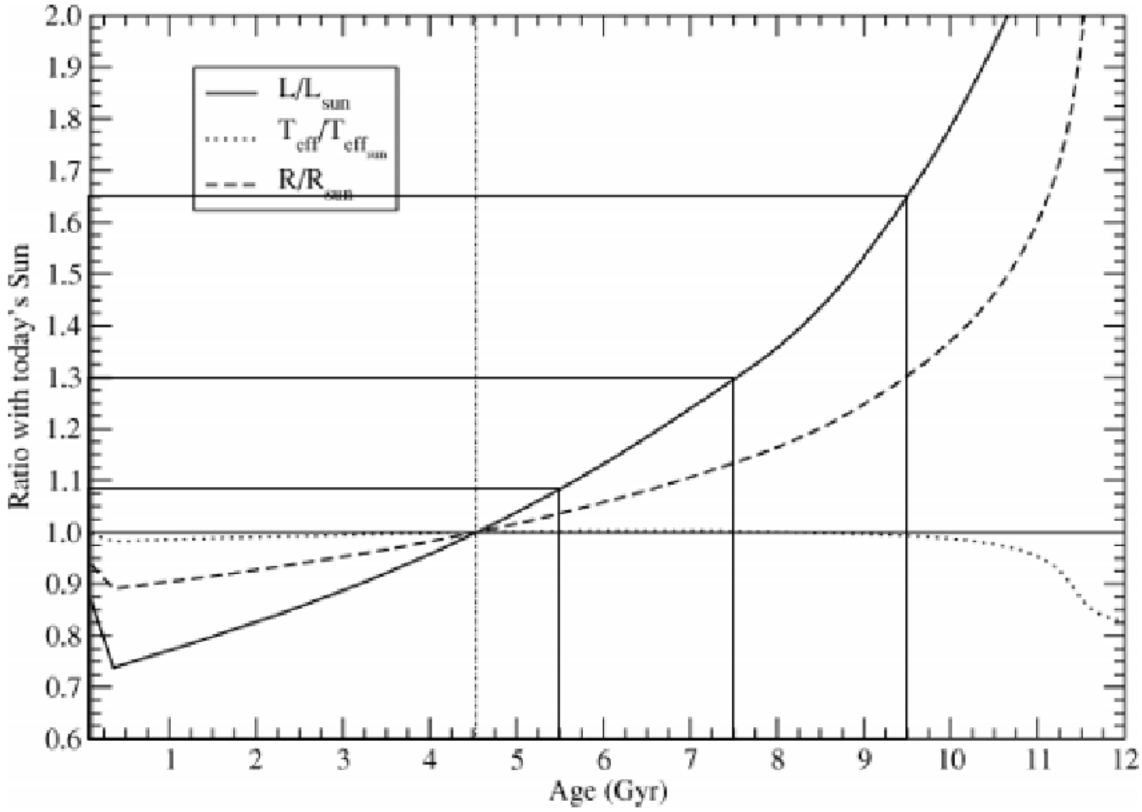
$$T_{\oplus} = \sqrt[4]{\frac{(1-k)L_{\odot}}{16\pi\sigma a_{\oplus}^2}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}02\cdot 3{,}826\cdot 10^{26}}{16\pi\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot(1{,}496\cdot 10^{11})^2}} = 105\,\mathrm{K} = -168\,^{\circ}\mathrm{C}\,. \tag{4.188}$$

(d) Ako prvé treba presne odčítať hodnoty z grafu pre Age 5,5; 7,5; 9,5 miliárd rokov. Dôležité je sa zorientovať v grafe správne a odčítavať z čiary, ktorá predstavuje svietivosť. Dostávame výsledky

i) $1{,}08\,L_{\odot}$,

ii) $1{,}30\,L_{\odot}$,

iii) $1{,}65\,L_{\odot}$,



Týmito koeficientmi prenásobíme svietivosť Slnka vo vzorci z podúlohy (d)

$$T_{\oplus,1} = \sqrt[4]{\frac{(1-k)\cdot 1{,}08 L_{\odot}}{16\pi\sigma a_{\oplus}^2}} = T_{\oplus}\sqrt[4]{1{,}08}\,, \tag{4.189}$$

$$T_{\oplus,2} = \sqrt[4]{\frac{(1-k)\cdot 1{,}30 L_{\odot}}{16\pi\sigma a_{\oplus}^2}} = T_{\oplus}\sqrt[4]{1{,}30}\,, \tag{4.190}$$

$$T_{\oplus,3} = \sqrt[4]{\frac{(1-k)\cdot 1{,}65 L_{\odot}}{16\pi\sigma a_{\oplus}^2}} = T_{\oplus}\sqrt[4]{1{,}65}\,. \tag{4.191}$$

Otázka sa však pýta na rozdiel teplôt, teda

$$\Delta T_{\oplus,1} = T_{\oplus}(\sqrt[4]{1{,}08}-1) = 105\cdot(\sqrt[4]{1{,}08}-1) = 2\,\mathrm{K}\,, \tag{4.192}$$

$$\Delta T_{\oplus,2} = T_{\oplus}(\sqrt[4]{1{,}30}-1) = 105\cdot(\sqrt[4]{1{,}30}-1) = 7\,\mathrm{K}\,, \tag{4.193}$$

$$\Delta T_{\oplus,3} = T_{\oplus}(\sqrt[4]{1{,}65}-1) = 105\cdot(\sqrt[4]{1{,}65}-1) = 14\,\mathrm{K}\,. \tag{4.194}$$

(e) Základným faktorom pre život je voda v tekutom stave, teda teplota väčšia ako 0 °C. Preto určíme teplotu v zakrúžkovanom období. Z grafu vyčítame, že to odpovedá 1,65 na y-ovej osi, ktorá predstavuje logaritmický nárast svietivosti Slnka. Preto svietivosť Slnka v danom období bude

$$L_{\odot,12,3} = L_{\odot}\cdot 10^{1{,}65} \approx 45 L_{\odot}\,. \tag{4.195}$$

Vzorcom z podúlohy (c) vyrátame teplotu

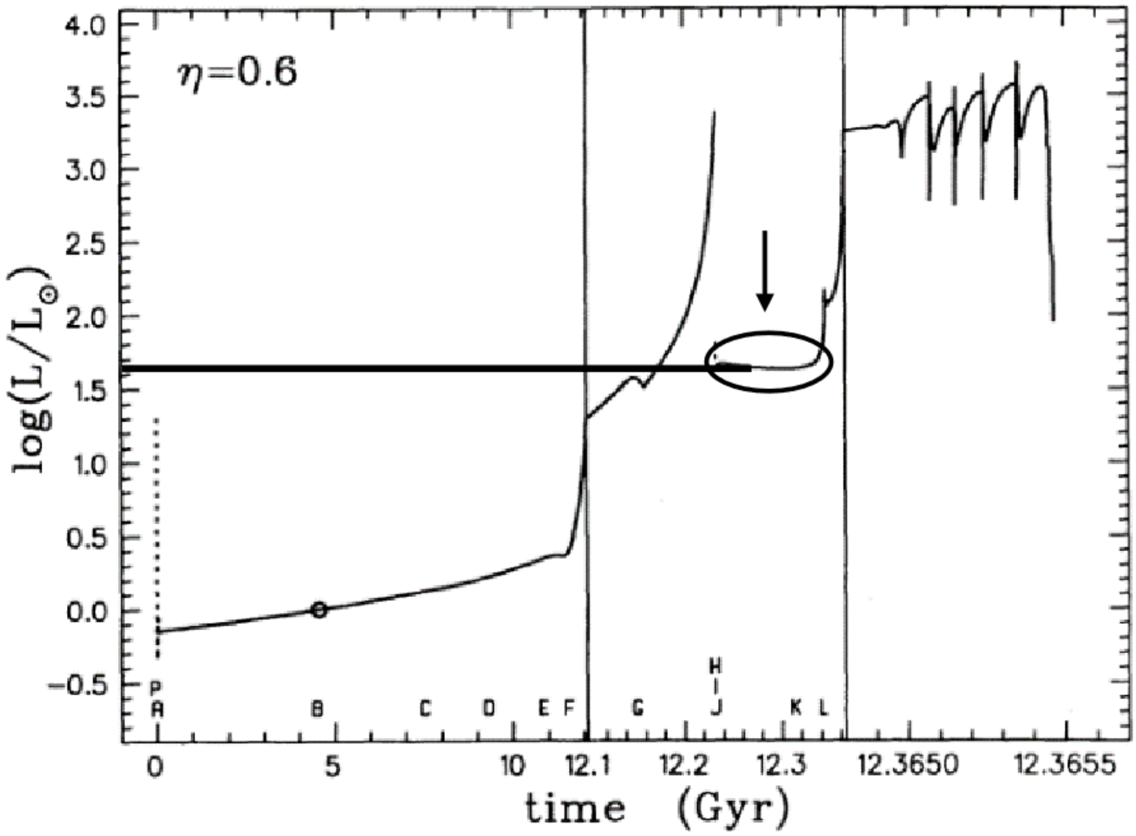
$$T_{\oplus,12,3} = \sqrt[4]{\frac{(1-k)\cdot 10^{1{,}65} L_{\odot}}{16\pi\sigma a_{\oplus}^2}} = T_{\oplus}\sqrt[4]{10^{1{,}65}}\,, \tag{4.196}$$

$$T_{\oplus,12,3} = 105\cdot\sqrt[4]{10^{1{,}65}} = 271\,\mathrm{K} = -2\,^{\circ}\mathrm{C}\,. \tag{4.197}$$

Teplota −2 °C je len trochu pod hranicou, ktorú sme si určili. Avšak netreba zabúdať že toto je priemerná teplota, teda v rovníkových oblastiach by život bol možný. Takisto Zem zahrieva aj jej jadro, respektíve skleníkový efekt plynov atmosféry, ktorú sme uzavreli pod zrkadlá. O koľko tieto efekty zvyšujú priemernú teplotu Zeme vieme zistiť, ak vyrátame podľa nášho modelu teplotu súčasnej Zeme bez zrkadiel

$$T_{\oplus,0} = \sqrt[4]{\frac{L_{\odot}}{16\pi\sigma a_{\oplus}^2}} = \sqrt[4]{\frac{3{,}826\cdot 10^{26}}{16\pi\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot(1{,}496\cdot 10^{11})^2}} = 278\,\mathrm{K} = 5\,^{\circ}\mathrm{C}\,. \tag{4.198}$$

Vidíme, že náš model nie je až tak zlý! Dostali sme len o 5 °C menšiu teplotu ako je realita (podľa zadania 10 °C). Preto môžeme predpokladať, že sa teplota na zrkadlovej Zemi vyhupne nad 0 °C a budú tu dokonca lepšie podmienky ako v dobe ľadovej. No a preto jednoznačne život bude možný na zrkadlovej Zemi počas obdobia asi 100 miliónov rokov.



4.4.19 AO 2023, úloha 3.1 – O medzihviezdnej absorpcii – riešenie

Farebný index $(B-V)_0 = 0$ nám hovorí, že tok žiarenia z hviezdy je v obidvoch filtroch rovnaký. Filter V je vo väčších vlnových dĺžkach ako filter B. Vo filtri V teda dochádza k menšej absorpcii ako vo filtri B a pozorovaný tok vo V bude vyšší ako v B. Magnitúdy na tom budú presne opačne – pozorovaná magnitúda V bude menšia ako pozorovaná magnitúda B, z toho vyplýva, že pozorovaný farebný index $(B-V)$ bude kladný.

Kapitola 5

Optika a detektory (riešenia)

5.1 Kategória ZŠ, domáce kolo – riešenia

5.1.1 AO 2007, úloha 4 – riešenie

Vzdialenosť Marsu v kvadratúre vypočítame z Pytagorovej vety

$$d = \sqrt{a_{♂}^2 - a_{\oplus}^2} = \sqrt{1{,}524^2 - 1^2} = 1{,}15\,\mathrm{au}\,. \tag{5.1}$$

Dva body musia mať uhlovú vzdialenosť rovnú minimálne rozlišovacej schopnosti ďalekohľadu.

$$\theta = \frac{x}{d} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,. \tag{5.2}$$

Ak pozorujeme na vlnovej dĺžke $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$, tak vzdialenosť bodov musí byť

$$x = 1{,}22\frac{\lambda d}{D} = 1{,}22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{0{,}6} = 1{,}92 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 192\,\mathrm{km}\,. \tag{5.3}$$

5.1.2 AO 2008, úloha 1 – riešenie

Najmenší možný uhlový priemer kráteru sa rovná rozlišovacej schopnosti

$$\theta = \frac{x}{a_{☾}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,, \tag{5.4}$$

$$d = 1{,}22\frac{550 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}844 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-3}} = 51{,}6\,\mathrm{km}\,. \tag{5.5}$$

5.1.3 AO 2014, úloha 4 – Rozlíšenie ďalekohľadu – riešenie

Vzdialenosť Marsu v kvadratúre vypočítame z Pytagorovej vety

$$d = \sqrt{a_{♂}^2 - a_{\oplus}^2} = \sqrt{1{,}524^2 - 1^2} = 1{,}15\,\mathrm{au}\,. \tag{5.6}$$

Dva body musia mať uhlovú vzdialenosť rovnú minimálne rozlišovacej schopnosti ďalekohľadu.

$$\theta = \frac{x}{d} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,, \tag{5.7}$$

Ak pozorujeme na vlnovej dĺžke $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$, tak vzdialenosť bodov musí byť

$$x = 1{,}22\frac{\lambda d}{D} = 1{,}22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{10} = 11{,}5\,\mathrm{km}\,. \tag{5.8}$$

5.1.4 AO 2015, úloha 4 – Priemer ďalekohľadu – riešenie

$$\frac{x}{r_\mathrm{p}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,, \tag{5.9}$$

$$D = 1{,}22\frac{\lambda r_\mathrm{p}}{x} = 1{,}22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{8}}{3600} = 0{,}07\,\mathrm{m} = 7\,\mathrm{cm}\,. \tag{5.10}$$

Pôvodnou myšlienkou úlohy boli využiť trojčlenku na výpočet uhlového priemeru kráteru v uhlových sekundách a následne použiť jednoduchší vzorec pre rozlišovaciu schopnosť v uhlových sekundách.

5.2 Kategória ZŠ, finále – riešenia

5.2.1 AO 2007, úloha 6 – riešenie

(a) Najmenší možný uhlový priemer kráteru sa rovná rozlišovacej schopnosti.

(b) V zadaní chýba údaj o deklinácii Mesiaca, ktorý je pre výpočet zorného poľa ďalekohľadu potrebný. Maximálna veľkosť zorného poľa nám vyjde, ak uvažujeme, že sa Mesiac práve nachádza na rovníku. V tomto prípade sa za 4 minúty Mesiac pohne o uhol

$$\alpha = \frac{4}{24 \cdot 60} \cdot 360° = 1° = 60' \,. \tag{5.11}$$

Počas 4 minút pozorujeme celý Mesiac, za tú dobu sa ľavý okraj Mesiaca pohne o $60'$, pravý okraj bude ešte o $30'$ ďalej, zorné pole ďalekohľadu bude preto FOV $= 90' = 1°30'$. Toto je najväčšia možná hodnota.
Najmenšiu možnú hodnotu získame, ak budeme uvažovať Mesiac s čo najväčšou deklináciou (alebo najmenšou, vyjde to rovnako). Dráha Mesiaca je voči rovine ekliptiky sklonená o 5,14°, maximálna možná deklinácia je preto $\delta_☾ = \varepsilon + i = 23°26' + 5{,}14° = 28{,}57°$. Za 4 minúty sa kotúčik Mesiaca pohne o uhol $\beta = 1° \cdot \cos(28{,}57°) = 53'$. Zorné pole ďalekohľadu je v tomto prípade FOV $= 53' + 30' = 83' = 1°23'$.

5.2.2 AO 2008, úloha 4 – Rozlíšenie ďalekohľadu – riešenie

$$x = 1{,}22\frac{\lambda a_☾}{D} = 1{,}22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}844 \cdot 10^{8}}{6} = 43\,\mathrm{m}\,. \tag{5.12}$$

5.2.3 AO 2013, úloha 1 – riešenie

$$\frac{x}{r_\mathrm{p}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,, \tag{5.13}$$

$$D = 1{,}22\frac{\lambda r_\mathrm{p}}{x} = 1{,}22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{8}}{3600} = 0{,}07\,\mathrm{m} = 7\,\mathrm{cm}\,. \tag{5.14}$$

Pôvodnou myšlienkou úlohy boli využiť trojčlenku na výpočet uhlového priemeru kráteru v uhlových sekundách a následne použiť jednoduchší vzorec pre rozlišovaciu schopnosť v uhlových sekundách.

5.3 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

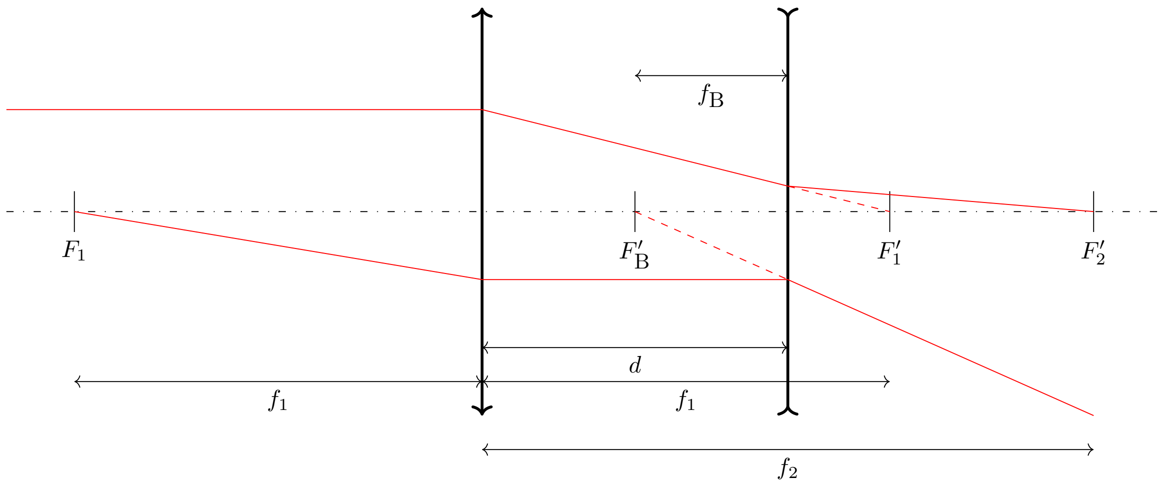
5.3.1 AO 2014, úloha 5 – Barlowova šošovka – riešenie

Pri výpočtoch využijeme zobrazovaciu rovnicu šošovky

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \,. \tag{5.15}$$

V tomto vzorovom riešení je použitá nasledujúca znamienková konvencia (je možné použiť aj inú, rovnice treba v tom prípade náležito upraviť)

- a - vzdialenosť predmetu od šošovky, ak je predmet vľavo od šošovky, je kladná, ak je predmet vpravo od šošovky, je záporná,
- a' - vzdialenosť obrazu od šošovky, vpravo je kladná, vľavo je záporná,
- f - ohnisková vzdialenosť šošovky, spojka kladná, rozptylka záporná,
- d - vzdialenosť Barlowovej šošovky od spojky objektívu, vpravo kladná, vľavo záporná.



Pri výpočte využijeme, že vieme ako cez spojku prechádzajú 2 typy lúčov. Situácia ja načrtnutá na obrázku. Ohnisková vzdialenosť objektívu je označená f_1, ohnisková vzdialenosť Barlowovej šošovky je označená f_B a ohnisková vzdialenosť sústavy obejktív-Barlowka je označená f_2. Zelený lúč je pred vstupom do šošovky objektívu rovnobežný s optickou osou. Po prechode cez spojku sa zlomí tak, že optickú os pretne s obrazovom ohnisku spojky, na obrázku označenom F'_1. Ak je za objektív zaradená ešte aj Barlowova šošovka, ktorá je rozptylka, tak sa lúč mierne odchýli od optickej osi a pretne ju až v obrazovom ohnisku sústavy objektív-Barlowka (na obrázku označené F'_2). Napíšeme si zobrazovaciu rovnicu pre prechod zeleného lúča optickou sústavou

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a'_2} \,. \tag{5.16}$$

Ak na šošovku dopadá zväzok lúčov rovnobežných s optickou osou, znamená to, že predmet sa nachádza v nekonečne, $a_2 \to \infty$. Všetky tieto lúče sa po prechode šošovkou pretnú v ohnisku F_2', obrazová vzdialenosť sa preto rovná ohniskovej vzdialenosti, $a_2' = f_2$.
Teraz sa na túto situáciu pozrieme z pohľadu rozptylky - Barlowovej šošovky. Po prechode spojkou na ňu dopadá zväzok zbiehajúcich sa lúčov, ktoré by sa normálne stretli na optickej osi v bode F_1' vpravo od polohy rozptylky. Efektívne je to, akoby rozptylka zobrazovala predmet, ktorý je od nej vpravo, teda za ňou. Z pohľadu rozptylky je preto predmetová vzdialenosť záporná a platí pre ňu $a_\mathrm{B} = -(f_1 - d)$, kde $(f_1 - d)$, je vzdialenosť ohniska F_1' od rozptylky. Ako bolo napísané vyššie, po prechode rozptylkou sa lúče stretnú v ohnisku F_2', vo vzdialenosti $a_\mathrm{B}' = f_2 - d$ od rozptylky. Obrazová vzdialenosť je kladná, lebo sa lúče pretnú vpravo od rozptylky. Zobrazovacia rovnica pre rozptylku je

$$\frac{1}{f_\mathrm{B}} = \frac{1}{a_\mathrm{B}} + \frac{1}{a_\mathrm{B}'}\,, \tag{5.17}$$

$$\frac{1}{f_\mathrm{B}} = \frac{-1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2 - d}\,. \tag{5.18}$$

Teraz sa pozrieme na zväzok lúčov vychádzajúcich z predmetového ohniska spojky F_1 (na obrázku sú reprezentované červeným lúčom). Po prechode spojkou sa zlomia tak, že budú rovnobežné s optickou osou a takto dopadnú na rozptylku. Pre rozptylku je to taká istá situácia, ako keby na ňu dopadali rovnobežné lúče z predmetu umiestneného v nekonečne. Po prechode rozptylkou sa zlomia tak, že sa za ňou budú rozbiehať. Ak si ich smery predĺžime spätne do oblasti pred rozptylkou, zistíme, že sa pretnú v obrazovom ohnisku rozptylky F_B'. Pre tento typ lúčov platí pri prechode sústavou objektív-Barlowka nasledujúca zobrazovacia rovnica

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d + f_\mathrm{B}}\,, \tag{5.19}$$

kde predmetová vzdialenosť je f_1 a obrazová vzdialenosť je $d + f_\mathrm{B}$ (je tam +, lebo ohnisková vzdialenosť rozptylky je záporná). Riešením sústavy zobrazovacích rovníc získame hodnoty f_B aj d. Najskôr upravíme druhú rovnicu a vyjadríme z nej f_B

$$\frac{1}{f_\mathrm{B} + d} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 f_2}\,, \tag{5.20}$$

$$f_\mathrm{B} = \frac{f_1 f_2}{f_1 - f_2} - d = \frac{f_1 f_2 - d f_1 + d f_2}{f_1 - f_2}\,. \tag{5.21}$$

Teraz upravíme prvú rovnicu

$$\frac{1}{f_\mathrm{B}} = \frac{-1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2 - d} = \frac{d - f_2 + f_1 - d}{(f_1 - d)(f_2 - d)} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 f_2 - d f_1 - d f_2 + d^2}\,, \tag{5.22}$$

$$f_\mathrm{B} = \frac{f_1 f_2 - d f_1 - d f_2 + d^2}{f_1 - f_2}\,. \tag{5.23}$$

Dva výrazy pre f_B dáme do rovnosti a dostaneme

$$f_1 f_2 - d f_1 + d f_2 = f_1 f_2 - d f_1 - d f_2 + d^2\,, \tag{5.24}$$

$$df_2 = d^2 - df_2\,, \tag{5.25}$$

$$2f_2 = d\,, \tag{5.26}$$

$$d = \frac{f_2}{2} = \frac{1800}{2} = 900\,\mathrm{mm}\,, \tag{5.27}$$

Dosadíme ešte do jednej zo zobrazovacích rovníc a vypočítame f_B

$$\frac{1}{f_\mathrm{B}} = \frac{-1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2 - d} = \frac{-1}{1200 - 900} + \frac{1}{1800 - 900} = \frac{-1}{300} + \frac{1}{900} = \frac{-3+1}{900}\,. \tag{5.28}$$

Dostaneme ohniskovú vzdialenosť Barlowovej šošovky $f_\mathrm{B} = 450\,\mathrm{mm}$. Vzdialenosť Barlowovej šošovky od objektívu musí byť $d = 900\,\mathrm{mm}$.

5.4 Kategória SŠ, finále – riešenia

5.4.1 AO 2014, úloha 3 – Mesiac v splne – riešenie

Je potrebné odmerať priemer Mesiaca na fotke a rozmer samotnej fotky a na základe toho vypočítať rozmer Mesiaca na čipe. Odmerané vzdialenosti závisia na mierke, v akej je táto zbierka zobrazená/vytlačená, ale výsledný rozmer Mesiaca by mal v každom prípade vyjsť približne $x = 10{,}1\,\mathrm{mm}$. Uhlový priemer Mesiaca je

$$\theta_{☾} = \frac{2R_{☾}}{d_{☾}}\,. \tag{5.29}$$

Okamžitú vzdialenosť Mesiaca zistíme z jeho paralaxy $p = 3620{,}32''$, pre ktorú približne platí

$$p = \frac{R_{\oplus}}{d_{☾}}\,. \tag{5.30}$$

Uhlový priemer Mesiaca sa dá tiež vypočítať z rozmerov Mesiaca v ohniskovej rovine (teda na čipe) a ohniskovej vzdialenosti

$$\theta_{☾} = \frac{x}{f} = \frac{2R_{☾}}{R_{\oplus}}p\,. \tag{5.31}$$

Ohnisková vzdialenosť objektívu je

$$f = \frac{xR_{\oplus}}{2pR_{☾}} = \frac{10{,}1 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6 \cdot 206265}{2 \cdot 1{,}7374 \cdot 10^6 \cdot 3620{,}32} = 1060\,\mathrm{mm} = 1{,}06\,\mathrm{m}\,. \tag{5.32}$$

5.4.2 AO 2015, úloha 3 – riešenie

Priemer kráteru vidíme pod uhlom

$$\alpha = \frac{x}{a_{☾}} = \frac{80 \cdot 10^3}{3{,}844e8} = 2{,}08 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} = 43''\,. \tag{5.33}$$

Rozlišovacia schopnosť oka je

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = 1{,}22 \cdot \frac{500 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}22 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} = 25''\,. \tag{5.34}$$

Uhlový priemer kráteru je väčší ako rozlišovacia schopnosť oka, preto ho je možné pozorovať.

5.4.3 AO 2016, úloha 4 – riešenie

Ak rádioteleskop a ďalekohľad majú mať rovnakú rozlišovaciu schopnosť, tak musí platiť rovnosť pomerov vlnovej dĺžky a priemeru apertúry.

$$\frac{\lambda_{\mathrm{r}}}{D_{\mathrm{r}}} = \frac{\lambda}{D}\,, \tag{5.35}$$

$$D_{\mathrm{r}} = \frac{\lambda_{\mathrm{r}}}{\lambda}D = \frac{0{,}01}{550 \cdot 10^{-9}} \cdot 0{,}1 = 1820\,\mathrm{m} = 1{,}82\,\mathrm{km}\,. \tag{5.36}$$

5.4.4 AO 2017, úloha 3 – riešenie

Uhlový priemer horizontu čiernej diery sa musí minimálne rovnať rozlišovacej schopnosti rádioteleskopu.

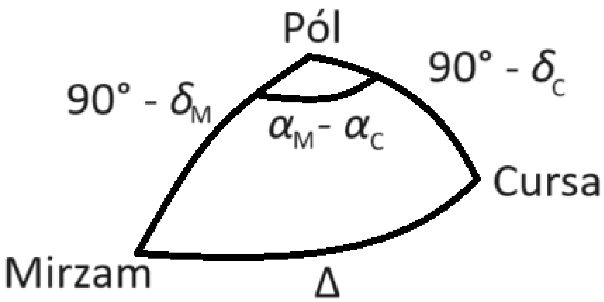
$$\frac{2R_\mathrm{S}}{d_\mathrm{GC}} = 1{,}22\frac{\lambda}{2R_\oplus}\,. \tag{5.37}$$

Potrebná vlnová dĺžka je

$$\lambda = \frac{4R_\mathrm{S}R_\oplus}{1{,}22d_\mathrm{GC}} = \frac{4\cdot 3\cdot 4{,}106\cdot 10^6\cdot 6{,}378\cdot 10^6}{1{,}22\cdot 8{,}18\cdot 10^3\cdot 3{,}086\cdot 10^{16}} = 1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{\mu m}\,. \tag{5.38}$$

5.4.5 AO 2017, úloha 4 – riešenie

Odmeriame vzdialenosť hviezd na fotke a rozmery fotky, z toho dokážeme vypočítať vzdialenosť hviezd na čipe, tá je zhruba $d = 13{,}4\,\mathrm{mm}$. Uhlovú vzdialenosť hviezd Δ vypočítame pomocou kosínusovej vety pre sférický trojuholník na obrázku



$$\cos\Delta = \cos(90° - \delta_\mathrm{M})\cos(90° - \delta_\mathrm{C}) + \sin(90° - \delta_\mathrm{M})\sin(90° - \delta_\mathrm{C})\cos(\alpha_\mathrm{M} - \alpha_\mathrm{C})\,, \tag{5.39}$$

$$\cos\Delta = \sin(\delta_\mathrm{M})\sin(\delta_\mathrm{C}) + \cos(\delta_\mathrm{M})\cos(\delta_\mathrm{C})\cos(\alpha_\mathrm{M} - \alpha_\mathrm{C})\,. \tag{5.40}$$

Rozdiel rektascenzií si prepočítame na stupne $\alpha_\mathrm{M} - \alpha_\mathrm{C} = 1^\mathrm{h}\,14^\mathrm{m}\,51^\mathrm{s} = 18°42'45''$.

$$\cos\Delta = \sin(-17°57'21'')\sin(-5°5'12'') + \cos(-17°57'21'')\cos(-5°5'12'')\cos(18°42'45'')\,, \tag{5.41}$$

$$\Delta = 22°21'46''\,. \tag{5.42}$$

Uhlová vzdialenosť hviezd je veľká, preto je pri výpočte ohniskovej vzdialenosti objektívu potrebné namiesto približného výpočtu použiť tangens. Platí

$$\frac{d}{2f} = \tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)\,. \tag{5.43}$$

Ohnisková vzdialenosť je

$$f = \frac{d}{2\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)} = \frac{13{,}4}{2\cdot\tan\left(\frac{22°21'46''}{2}\right)} = 33{,}9\,\mathrm{mm}\,. \tag{5.44}$$

5.4.6 AO 2020, úloha 4 – Ďalekohľad – riešenie

Ohnisková vzdialenosť objektívu je $f = 5D = 5 \cdot 15 = 75\,\mathrm{cm}$. Zväčšenie ďalekohľadu je

$$\Gamma = \frac{f}{f_{\mathrm{ok}}} = \frac{75}{1} = 75\,. \tag{5.45}$$

Za 190 s sa hodinový uhol Vegy zmení o

$$\Delta t = \frac{190}{86400} \cdot 360° = 0{,}79° = 0°47'30''\,. \tag{5.46}$$

Vega sa nenachádza na rovníku, preto na oblohe prejde v skutočnosti o niečo menší uhol, ten je zároveň zorným poľom ďalekohľadu

$$\mathrm{AFOV} = \Delta \mathrm{t} \cos(\delta_{\mathrm{V}}) = 0°47'30'' \cdot \cos(38°47') = 37'\,. \tag{5.47}$$

Uhol $\vartheta_{\mathrm{J}} = 45''$ sa na čipe zobrazí na dĺžku

$$x = f\theta_{\mathrm{J}} = 750 \cdot \frac{45}{206265} = 0{,}164\,\mathrm{mm}\,. \tag{5.48}$$

Počet pixelov, ktorý pripadá na 1 mm je

$$\frac{12{,}8 \cdot 10^6}{35{,}8} = 357\,542\,. \tag{5.49}$$

Priemer obrazu Jupitera v px je

$$0{,}164 \cdot 357\,542 = 58\,637\,. \tag{5.50}$$

Kapitola 6

Fyzika hviezd a planét (riešenia)

6.1 Kategória ZŠ, domáce kolo – riešenia

6.1.1 AO 2008, úloha 7 – Ničivý impakt – riešenie

Pri dopade Apophisu na Zem by sa uvoľnila všetka jeho kinetická energia

$$E_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}4{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 12000^2 = 3{,}3 \cdot 10^{18}\,\mathrm{J}\,. \tag{6.1}$$

Pri dopade Tunguzského telesa sa uvoľnila energia

$$E_{\mathrm{T}} = 20 \cdot 4{,}184 \cdot 10^{15} = 8{,}37 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}\,, \tag{6.2}$$

$$\frac{E_{\mathrm{A}}}{E_{\mathrm{T}}} = \frac{3{,}3 \cdot 10^{18}}{8{,}37 \cdot 10^{16}} = 39\,. \tag{6.3}$$

Pri dopade Apophisu by sa uvoľnilo asi 39-krát viac energie.

6.1.2 AO 2016, úloha 4 – Plávajúca doska na inej planéte – riešenie

Doska bude ponorená tak hlboko, aby sa vyrovnali veľkosti tiažovej sily pôsobiacej smerom nadol a vztlakovej sily pôsobiacej smerom nahor. Tiažová sila je

$$F_{\mathrm{g}} = g_{\mathrm{P}} m_{\mathrm{D}} = g_{\mathrm{P}} V \rho_{\mathrm{D}}\,. \tag{6.4}$$

Ponorená časť dosky má objem V_{p}, vztlaková sila je

$$F_{\mathrm{vz}} = g_{\mathrm{P}} V_{\mathrm{p}} \rho_{\mathrm{V}}\,. \tag{6.5}$$

V rovnováhe síl platí

$$g_{\mathrm{P}} V \rho_{\mathrm{D}} = g_{\mathrm{P}} V_{\mathrm{p}} \rho_{\mathrm{V}}\,. \tag{6.6}$$

Vidíme, že objem ponorenej časti dosky nezávisí na tiažovom zrýchlení, iba na hustote dreva a vody, doska bude preto ponorená do rovnakej hĺbky ako na Zemi, teda 5 cm.

6.2 Kategória ZŠ, finále – riešenia

6.2.1 AO 2008, úloha 2 – Slnko – riešenie

(a) Využijeme Einsteinov vzťah medzi hmotnosťou a energiou

$$E = mc^2 = L_\odot t\,, \tag{6.7}$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{L_\odot t}{c^2} = \frac{3{,}826 \cdot 10^{26} \cdot 86400}{(2{,}9979 \cdot 10^8)^2} = 3{,}68 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg} = 3{,}68 \cdot 10^{11}\,\mathrm{t}\,. \tag{6.8}$$

(b) Postupujeme rovnako ako v časti (a)

$$E = M_\odot c^2 = L_\odot t\,, \tag{6.9}$$

$$t = \frac{M_\odot c^2}{L_\odot} = \frac{1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^2}{3{,}826 \cdot 10^{26}} = 4{,}67 \cdot 10^{20}\,\mathrm{s} = 1{,}48 \cdot 10^{13}\,\mathrm{rokov}\,. \tag{6.10}$$

6.2.2 AO 2009, úloha 4 – Energia asteroidu – riešenie

(a) Ak si zjednodušíme situáciu a uvažujeme, že asteroid mal po celú dobu pádu rovnakú rýchlosť, potom ku zmene jeho kinetickej energie prispelo iba zníženie hmotnosti.

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)v^2\,. \tag{6.11}$$

Z tejto zmeny pripadá $\frac{100}{10101}$ na svetelnú energiu.

$$E_\mathrm{s} = \frac{100}{10101}\Delta E_\mathrm{k} = \frac{100}{10101} \cdot \frac{1}{2}(m_1 - m_2)v^2 = \frac{100}{10101} \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 40000^2 = 7{,}13 \cdot 10^8\,\mathrm{J}\,. \tag{6.12}$$

(b) Žiarovka by musela svietiť po dobu

$$t = \frac{E}{P} = \frac{7{,}13 \cdot 10^8}{100} = 7{,}13 \cdot 10^6\,\mathrm{s} = 82{,}5\,\mathrm{dní}\,. \tag{6.13}$$

6.2.3 AO 2010, úloha 3 – riešenie

(a)

$$\rho_\mathrm{WD} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}9897 \cdot 10^{30}}{4\pi \cdot (6{,}378 \cdot 10^6)^3} = 1{,}1 \cdot 10^9\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{6.14}$$

(b)

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho_\mathrm{WD}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}{4\pi \cdot 1{,}1 \cdot 10^9}} = 1{,}09 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 109\,\mathrm{km}\,. \tag{6.15}$$

6.2.4 AO 2010, úloha 4 – riešenie

Gravitačné zrýchlenie je

$$g = \frac{GM}{R^2}\,. \tag{6.16}$$

Hmotnosť planéty Kvark je

$$M = \frac{gR_\oplus^2}{G} = \frac{20 \cdot (6{,}378 \cdot 10^6)^2}{6{,}673 \cdot 10^{-11}} = 1{,}22 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}\,. \tag{6.17}$$

6.2.5 AO 2012, úloha 1 – Plávajúca doska na exoplanéte – riešenie

Doska bude ponorená tak hlboko, aby sa vyrovnali veľkosti tiažovej sily pôsobiacej smerom nadol a vztlakovej sily pôsobiacej smerom nahor. Tiažová sila je

$$F_\mathrm{g} = g_\mathrm{P} m_\mathrm{D} = g_\mathrm{P} V \rho_\mathrm{D}\,. \tag{6.18}$$

Ponorená časť dosky má objem V_p, vztlaková sila je

$$F_\mathrm{vz} = g_\mathrm{P} V_\mathrm{p} \rho_\mathrm{V}\,. \tag{6.19}$$

V rovnováhe síl platí

$$g_\mathrm{P} V \rho_\mathrm{D} = g_\mathrm{P} V_\mathrm{p} \rho_\mathrm{V}\,. \tag{6.20}$$

Vidíme, že objem ponorenej časti dosky nezávisí na tiažovom zrýchlení, iba na hustote dreva a vody, doska bude preto ponorená do rovnakej hĺbky ako na Zemi, teda 5 cm.

6.2.6 AO 2012, úloha 3 – riešenie

Vyjdeme vo vzorca pre hustotu guľového telesa

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}\,. \tag{6.21}$$

Obe telesá majú rovnakú hustotu, takže platí

$$\frac{M_\oplus}{R_\oplus^3} = \frac{4{,}5 M_\oplus}{R^3}\,, \tag{6.22}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{4{,}5 M_\oplus R_\oplus^3}{M_\oplus}} = \sqrt[3]{4{,}5} \cdot 6378 = 10\,530\,\mathrm{km}\,. \tag{6.23}$$

6.3 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

6.3.1 AO 2008, úloha 4 – riešenie

Použijeme zákon zachovania momentu hybnosti

$$L = I\omega = \text{konštanta}. \tag{6.24}$$

Moment zotrvačnosti je úmerný hmotnosti Slnka a druhej mocnine jeho polomeru, konštanta úmernosti nás v tomto príklade nemusí zaujímať, lebo sa v neskorších výpočtoch vykráti

$$I = KMR^2\,. \tag{6.25}$$

Uhlová rýchlosť a perióda rotácie sú spojené vzťahom

$$\omega = \frac{2\pi}{P}\,. \tag{6.26}$$

Dosadíme do zákonu zachovania a vyjadríme novú rotačnú periódu

$$\frac{2\pi M_\odot R_\odot^2}{P_\odot} = L_1 = L_2 = \frac{2\pi M_\odot R^2}{P}\,, \tag{6.27}$$

$$P = \frac{R^2}{R_\odot^2} P_\odot = \frac{10^2 \cdot 86400 \cdot 25}{(6{,}955 \cdot 10^5)^2} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s} = 0{,}45\,\mathrm{ms}\,. \tag{6.28}$$

6.3.2 AO 2009, úloha 2 – riešenie

Hmotnosť Zeme je súčtom hmotnosti jadra a oblasti mimo jadra

$$M_\oplus = M_\mathrm{j} + M_\mathrm{mj}\,. \tag{6.29}$$

Jednotlivé hmotnosti rozpíšeme ako súčin hustoty a objemu danej oblasti. Objem časti Zeme mimo jadra vypočítame jednoducho ako

$$V_\mathrm{mj} = \frac{4}{3}\pi(R_\oplus^3 - R_\mathrm{j}^3)\,, \tag{6.30}$$

$$\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3 \rho_\oplus = \frac{4}{3}\pi R_\mathrm{j}^3 \rho_\mathrm{j} + \frac{4}{3}\pi(R_\oplus^3 - R_\mathrm{j}^3)\rho_\mathrm{mj}\,. \tag{6.31}$$

Po skrátení konštánt vyjadríme z rovnosti hustotu jadra.

$$\rho_\mathrm{j} = \left[R_\oplus^3 \rho_\oplus - (R_\oplus^3 - R_\mathrm{j}^3)\rho_\mathrm{mj}\right] \frac{1}{R_\mathrm{j}^3}\,, \tag{6.32}$$

$$\rho_\mathrm{j} = \left[6378^3 \cdot 5500 - (6378^3 - 3470^3) \cdot 3500\right] \frac{1}{3470^3} = 15\,900\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{6.33}$$

6.3.3 AO 2011, úloha 6 – riešenie

(a) Celková energia potrebná na roztopenie ľadu sa rozdelí na dve časti. Prvá sa spotrebuje na zohriatie ľadu na teplotu topenia, teda 0°C (273 K) a druhá sa spotrebuje na skupenskú premenu ľadu na vodu. Predpokladáme, že všetka potrebná energia je ľadu dodaná vo forme slnečného žiarenia

$$E = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} St\,, \tag{6.34}$$

$$E = Sh\rho_{\text{ľad}}[c_{\mathrm{H_2O}}\Delta T + L_{\mathrm{t,ľad}}]\,. \tag{6.35}$$

Plochu ľadu, ktorou absorbuje žiarenie sme označili S, hrúbku ľadu h. Žiarivý výkon Slnka je

$$L_\odot = 4\pi a_\oplus^2 h\rho_{\text{ľad}}\frac{1}{t}[c_{\mathrm{H_2O}}\Delta T + L_{\mathrm{t,ľad}}]\,, \tag{6.36}$$

$$L_\odot = \frac{4\pi\cdot(1{,}496\cdot 10^{11})^2\cdot 0{,}01\cdot 917}{58\cdot 60}\cdot(4180\cdot 10 + 334\,000) = 2{,}78\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}\,. \tag{6.37}$$

Tabuľková hodnota je $L_{\odot,\mathrm{tab}} = 3{,}826\cdot 10^{26}$ W, nami vypočítaná hodnota z nej tvorí iba 73%. Pri výpočte sme zanedbali albedo zemskej atmosféry i ľadu ako aj fakt, že Slnko nie je jediným zdrojom tepla, ktoré je použité na topenie ľadu.

(b) Energia potrebná na roztopenie ľadu je stále rovnaká. Čas topenia preto závisí iba na príkone energie od Slnka. Keďže plocha ľadu sa nemení, príkon závisí iba na toku žiarenia od Slnka, ktorý je nepriamo úmerný druhej mocnine vzdialenosti od Slnka. Na základe týchto úvah vidíme, že pre pomer časov topenia na Marse a na Zemi platí

$$\frac{t_♂}{t_\oplus} = \frac{F_♂}{F_\oplus} = \frac{a_♂^2}{a_\oplus^2}\,. \tag{6.38}$$

Na Marse sa ľad roztopí za čas

$$t_♂ = \frac{1{,}524^2}{1^2}\cdot 58 = 135\,\mathrm{min} = 2\,\mathrm{h}\ 15\,\mathrm{min}\,. \tag{6.39}$$

6.3.4 AO 2013, úloha 6 – riešenie

Tok častíc pri Zemi je

$$\Phi = nv = 8\cdot 320\cdot 1000\cdot 100^3 = 2{,}56\cdot 10^{12}\,\mathrm{m^{-2}\,s^{-1}}\,. \tag{6.40}$$

Za 1 sekundu prejde sférou s polomerom rovným $a_\oplus$ počet častíc

$$N = 4\pi a_\oplus^2\Phi\,. \tag{6.41}$$

Častice sú prevažne protóny, takže za čas t ubudne zo Slnka hmotnosť

$$M_1 = 4\pi a_\oplus^2\Phi t m_\mathrm{p}\,, \tag{6.42}$$

$$M_1 = 4\pi(1{,}496\cdot 10^{11})^2\cdot 2{,}56\cdot 10^{12}\cdot 86400\cdot 365{,}25\cdot 938{,}27\cdot 1{,}783\cdot 10^{-30} = 3{,}8\cdot 10^{16}\,\mathrm{kg}\,. \tag{6.43}$$

Počas svojej existencie takto Slnko stratilo len malý zlomok hmotnosti

$$\frac{M_2}{M_\odot} = \frac{4{,}6\cdot 10^9\cdot M_1}{M_\odot} = \frac{4{,}6\cdot 10^9\cdot 3{,}8\cdot 10^{16}}{1{,}9891\cdot 10^{30}} = 8{,}8\cdot 10^{-5} = 0{,}0088\ \%\,. \tag{6.44}$$

6.3.5 AO 2015, úloha 1 – Jeansovo kritérium – riešenie

Pre systém v rovnováhe platí viriálová veta

$$2E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = 0 \tag{6.45}$$

V prípade, že prevládne gravitačná potenciálna energia, dôjde ku kolapsu, ak prevládne kinetická energia, oblak sa rozplynie. Rovnica vyššie popisuje hraničný stav.
Využijeme vzťah pre potenciálnu energiu zo zadania. Celkovú kinetickú energiu oblaku odhadneme ako kinetickú energiu ideálneho plynu s teplotou T

$$E_\mathrm{k} = \frac{3}{2} N k_\mathrm{B} T\,, \tag{6.46}$$

$$2 \cdot \frac{3}{2} N k_\mathrm{B} T - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 0\,. \tag{6.47}$$

Celková hmotnosť oblaku je $M = Nm$, kde N je počet častíc a m je hmotnosť jednej častice

$$R^3 = \frac{3M}{4\pi\rho}\,, \tag{6.48}$$

$$\frac{k_\mathrm{B}T}{m} = \frac{GM}{5R}\,, \tag{6.49}$$

$$\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)^3 = \frac{G^3M^3}{5^3R^3}\,, \tag{6.50}$$

$$\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)^3 = \frac{G^3M^3}{5^3}\frac{4\pi\rho}{3M}\,. \tag{6.51}$$

Ak hmotnosť oblaku presiahne kritickú Jeansovu hmotnosť M_J, tak dôjde ku kolapsu

$$M_\mathrm{J} = \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{375}{4\pi G^3\rho}}\,. \tag{6.52}$$

6.3.6 AO 2015, úloha 2 – Hviezda – riešenie

Na začiatku pobytu hviezdy na hlavnej postupnosti tvorí vodík približne 70% jej hmotnosti. Z toho sa spotrebuje 70% na jadrové reakcie. Typická luminozita hviezdy spektrálneho typu A0 je 40 $L_\odot$.
Jadrových reakcií pri ktorých vznikajú jadrá ${}^4_2\mathrm{He}$ sa zúčastnia 4 jadrá vodíka ${}^1_1\mathrm{H}$. Jadro hélia vzniká hlavne CNO cyklom, pri prebehnutí jedného CNO cyklu sa vyprodukuje 26,73 MeV c^{-2} energie.
Celkový počet jadier vodíka, ktoré sa počas zotrvania hviezdy na hlavnej postupnosti zúčastnia jadrových reakcií je

$$N_\mathrm{H} = \frac{0{,}7^2 \cdot 40 M_\odot}{m_\mathrm{p}}\,. \tag{6.53}$$

Celková vyžiarená energia sa rovná počtu prebehnutých reakcií krát energia z jednej reakcie.

$$E = \frac{0{,}7^2 \cdot 40 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{4 \cdot 938{,}27 \cdot 1{,}783 \cdot 10^{-30}} \cdot 26{,}73 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 2{,}49 \cdot 10^{40}\,\mathrm{J}\,. \tag{6.54}$$

6.3.7 AO 2020, úloha 2 – Pióny v atmosfére – riešenie

(a) Vzťah medzi celkovou energiou a pokojovou hmotnosťou piónu je

$$E = \gamma m_0 c^2 \,. \tag{6.55}$$

Faktor γ sa nazýva Lorentzov faktor a má hodnotu

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1000}{135} = 7{,}41 \,. \tag{6.56}$$

Lorentzov faktor je definovaný pomocou rýchlosti v

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,. \tag{6.57}$$

Vyjadríme si z toho rýchlosť piónu

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \,, \tag{6.58}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \,, \tag{6.59}$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} c = \sqrt{1 - \frac{1}{7{,}41^2}} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 2{,}97 \cdot 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}} \,. \tag{6.60}$$

Doba života τ uvedená v zadaní je z pohľadu piónu. Vďaka dilatácii času bude z pohľadu pozorovateľa trvať dlhšiu dobu ($t = \gamma\tau$), než sa pión rozpadne. Za tento čas prejde pión dráhu

$$l = vt = v\gamma\tau = 7{,}41 \cdot 2{,}97 \cdot 10^8 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-17} = 1{,}85 \cdot 10^{-7} \,\mathrm{m} = 185 \,\mathrm{nm} \,. \tag{6.61}$$

(b) Rozdiel energií fotónov bude najväčší v prípade, že poletia presne opačnými smermi, jeden presne v smere pohybu pôvodného piónu a druhý presne proti tomuto smeru. Zo zákonu zachovanie energie dostaneme, že súčet energií fotónov sa musí rovnať energii piónu, z ktorého vznikli

$$E_1 + E_2 = E \,. \tag{6.62}$$

Zo zákonu zachovania hybnosti zase dostaneme, že vektorový súčet hybností fotónov sa musí rovnať hybnosti piónu. Pretože sa všetky 3 častice pohybujú po jednej priamke, namiesto vektorového zápisu môžeme rovno použiť rozdiel číselných hodnôt hybností fotónov

$$p_1 - p_2 = p \,. \tag{6.63}$$

Hybnosť a energia fotónu pohybujúceho sa v smere piónu sú označené indexom 1, druhého fotónu indexom 2, veličiny bez indexu popisujú pión. Pre hybnosť a energiu fotónu platí jednoduchý vzťah (pretože majú nulovú pokojovú hmotnosť)

$$p = \frac{E}{c} \,. \tag{6.64}$$

Dosadíme to do zákonu zachovania hybnosti a dostaneme

$$p_1 - p_2 = \frac{E_1 - E_2}{c} = p\,, \tag{6.65}$$

$$E_1 - E_2 = cp\,. \tag{6.66}$$

Pión má na rozdiel od fotónov nenulovú pokojovú hmotnosť, preto medzi jeho hybnosťou a energiou platí zložitejší vzťah

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2\,. \tag{6.67}$$

Sčítaním a odčítaním rovníc zákonov zachovania dostaneme výrazy pre energie obidvoch fotónov

$$E_1 + E_1 + E_1 - E_2 = E + cp\,, \tag{6.68}$$

$$E_1 = \frac{E + cp}{2}\,, \tag{6.69}$$

$$E_2 = \frac{E - cp}{2}\,. \tag{6.70}$$

Rozdiel energií je

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{2cp}{2} = cp = c\frac{\sqrt{E^2 - m_0^2c^4}}{c} = \sqrt{(1000)^2 + 135^2} = 991\,\mathrm{MeV}\,. \tag{6.71}$$

6.4 Kategória SŠ, finále – riešenia

6.4.1 AO 2008, úloha 1 – Pulzar – riešenie

Úloha sa dá vyriešiť dvomi spôsobmi. Na presnejší výpočet je potrebné použiť integrály a derivácie. Najskôr vypočítame časovú deriváciu kinetickej energie.

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{4\pi^2}{P^2} = \frac{2\pi^2 I}{P^2}\,, \tag{6.72}$$

$$\frac{dE_\mathrm{k}}{dt} = -4\pi^2 I \frac{1}{P^3} \frac{dP}{dt}\,. \tag{6.73}$$

Zo zadania vieme, že derivácia kinetickej energie je nepriamo úmerná štvrtej mocnine periódy, teda platí

$$\frac{dE_\mathrm{k}}{dt} = \frac{C}{P^4}\,. \tag{6.74}$$

C je konštanta úmernosti. Celkovo dostaneme rovnosť

$$\frac{C}{P^4} = -4\pi^2 I \frac{1}{P^3} \frac{dP}{dt}\,. \tag{6.75}$$

Všetky konštanty presunieme na ľavú stranu rovnice a dostaneme nasledujúcu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{C}{-4\pi^2 I} = P\frac{dP}{dt} = K\,. \tag{6.76}$$

Ľavá strana rovnice je konštanta, jej hodnota je

$$K = P\frac{dP}{dt} = 0{,}03 \cdot 5 \cdot 10^{-13} = 1{,}5 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{s}\,. \tag{6.77}$$

Diferenciálnu rovnicu vyriešime separáciou premenných

$$\int_0^T K dt = \int_0^P P' dP'\,. \tag{6.78}$$

Integračné medze sme vybrali nasledujúcim spôsobom: v čase $t = 0$ vybuchla supernova a vznikla neutrónová hviezda, čas $t = T$ je súčasnosť a teda zároveň aj vek neutrónovej hviezdy. Na začiatku bola rotačná perióda veľmi malá oproti súčasnej, zobrali sme limitný prípad, kedy by na začiatku existencie bola $P = 0$, teraz je perióda rotácie $P = 30\,\mathrm{ms}$. Po integrovaní dostaneme rovnosť

$$KT = \frac{P^2}{2}\,, \tag{6.79}$$

$$T = \frac{P^2}{2K} = \frac{0{,}03^2}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-14}} = 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} = 950\,\mathrm{rokov}\,. \tag{6.80}$$

Supernova vybuchla pred približne 950 rokmi. Úlohu je možné riešiť aj bez použitia integrálov a derivácií, ak predpokladáme, že zmena periódy v čase bola konštantná. V tom prípade sa rotačná perióda zmenila z hodnoty blízkej 0 na dnešnú periódu $P = 30\,\mathrm{ms}$. Týmto spôsobom dostaneme horný odhad veku pulzaru T

$$\frac{P}{T} \approx 5 \cdot 10^{-13}\,, \tag{6.81}$$

$$T = \frac{P}{5 \cdot 10^{-13}} = \frac{0{,}03}{5 \cdot 10^{-13}} = 6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} = 1900\,\mathrm{rokov}\,. \tag{6.82}$$

Týmto spôsobom nám vyšiel aspoň horný odhad veku pulzaru, ktorý je zhruba 2-krát väčší ako skutočný vek.

6.4.2 AO 2010, úloha 5 – riešenie

Metánová koma sa začne tvoriť, keď efektívna teplota kométy bude $-82\,°\mathrm{C}$. Energia, ktorú kométa prijme od Slnka sa v prípade termodynamickej rovnováhy vyžiari z celého povrchu kométy

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2}\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4\,, \tag{6.83}$$

$$r = \sqrt{\frac{L_\odot}{16\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{3{,}826 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (-82 + 273)^4}}\,, \tag{6.84}$$

$$r = 3{,}176 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = 2{,}1\,\mathrm{au}\,. \tag{6.85}$$

6.4.3 AO 2016, úloha 2 – riešenie

Stredná kvadratická rýchlosť elektrónov v koróne je

$$v_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T}{m_\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 10^6}{0{,}511 \cdot 1{,}783 \cdot 10^{-30}}} = 6740\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{6.86}$$

Úniková rýchlosť je

$$v_\mathrm{esc} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\odot}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{6{,}955 \cdot 10^8}} = 618\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{6.87}$$

Rýchlosť elektrónov je typicky oveľa vyššia ako úniková rýchlosť. Okrem elektrónov sa v koróne nachádzajú aj protóny, ktoré udržujú elektróny v koróne vďaka elektrickej príťažlivosti medzi nimi. Protóny sa v koróne udržia, pretože majú nižšiu strednú kvadratickú rýchlosť ako je úniková rýchlosť

$$v_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T}{m_\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T}{m_\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 10^6}{938{,}27 \cdot 1{,}783 \cdot 10^{-30}}} = 157\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{6.88}$$

6.4.4 AO 2020, úloha 2 – Prečo svietia hviezdy – riešenie

(a) Celková kinetická energia všetkých komét sa rovná energii, ktorú Slnko vyžiari za rok

$$L_\odot t = N\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv^2 \,. \tag{6.89}$$

N označuje počet komét, m hmotnosť jednej kométy a $M = Nm$ hmotnosť všetkých komét dohromady.

$$M = \frac{2L_\odot t}{v^2} = \frac{2 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26} \cdot 365{,}25 \cdot 86400}{20000^2} = 6{,}04 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}\,, \tag{6.90}$$

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3\,, \tag{6.91}$$

$$N = \frac{M}{m} = \frac{3M}{4\pi\rho r^3} = \frac{3 \cdot 6{,}04 \cdot 10^{25}}{4\pi \cdot \frac{0{,}6 \cdot 100^3}{1000} \cdot 5000^3} = 1{,}92 \cdot 10^{11}\,. \tag{6.92}$$

(b) Najskôr potrebujeme zistiť objem hlavného pásu asteroidov. Vypočítame ho ako rozdiel objemov valcov s polomerom $r_1 = 3{,}27\,\mathrm{au}$ a $r_2 = 2{,}06\,\mathrm{au}$

$$V = \pi(r_1^2 - r_2^2)h\,, \tag{6.93}$$

$$m = \rho V = \pi\rho(r_1^2 - r_2^2)h\,, \tag{6.94}$$

$$m = \pi \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-14} \cdot (3{,}27^2 - 2{,}06^2) \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^3 \cdot 1 = 2{,}92 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}\,, \tag{6.95}$$

$$E = L_\odot t = \frac{1}{2}mv^2\,. \tag{6.96}$$

Pri dopade všetkých telies z hlavného pásu asteroidov by Slnko mohlo svietiť maximálne

$$t = \frac{mv^2}{2L_\odot} = \frac{2{,}92 \cdot 10^{21} \cdot 20000^2}{2 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}} = 1526\,\mathrm{s}\,. \tag{6.97}$$

Na to, aby Slnko mohlo svietiť 4,6 miliardy rokov by naň muselo dopadnúť oveľa viac hmoty

$$N = \frac{4{,}6 \cdot 10^9 \cdot 365{,}25 \cdot 86400}{1526} = 9{,}5 \cdot 10^{13}\,. \tag{6.98}$$

(c) Uvažujeme, že Slnko sa svojimi rozmermi na začiatku svojho života blížilo k nekonečnu (čo je ozaj nerealistické), teda by malo vtedy nulovú potenciálnu energiu. Potom by mohlo počas svojho života vyžiariť energiu

$$E = -\Delta E_\mathrm{p} = \frac{3GM^2}{5R}\,. \tag{6.99}$$

Slnko by mohlo tak žiariť maximálne po dobu

$$t = \frac{E}{L} = \frac{3GM^2}{5RL}\,, \tag{6.100}$$

$$t = \frac{3 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}9891 \cdot 10^{30})^2}{5 \cdot 6{,}955 \cdot 10^8 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}} = 5{,}95 \cdot 10^{14}\,\mathrm{s} = 18{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{rokov}\,. \tag{6.101}$$

(d) Energia, ktorá vznikne pri jadrovej reakcii sa vypočíta ako rozdiel pokojových hmotností jadier, ktoré do nej vstupujú a jadier, ktoré sa vytvoria. Rozpíšeme si energie vznikajúce pri jednotlivých reakciách. Hmotnosť neutrín je voči iným časticiam zanedbateľná

$$^1H + \ ^1H \to \ ^2H + e^+ + \nu_e \,, \tag{6.102}$$

$$E_1 = 2 \cdot 938{,}27 - 1875{,}6 - 0{,}511 = 0{,}429\,\mathrm{MeV}\,, \tag{6.103}$$

$$^2H + \ ^1H \to \ ^3He + \gamma\,, \tag{6.104}$$

$$E_2 = 1875{,}6 + 938{,}27 - 2808{,}3 = 5{,}57\,\mathrm{MeV}\,, \tag{6.105}$$

$$^3He + \ ^3He \to \ ^4He + \ ^1H + \ ^1H\,, \tag{6.106}$$

$$E_3 = 2 \cdot 2808{,}3 - 3727{,}4 - 2 \cdot 938{,}27 = 12{,}66\,\mathrm{MeV}\,, \tag{6.107}$$

$$e^+ + \ e^- \to 2\,\gamma\,, \tag{6.108}$$

$$E_4 = 2 \cdot 0{,}511 = 1{,}022\,\mathrm{MeV}\,. \tag{6.109}$$

Celková energia získaná z jedného cyklu je

$$E = 2E_1 + 2E_2 + E_3 + 2E_4\,, \tag{6.110}$$

$$E = 2 \cdot 0{,}429 + 2 \cdot 5{,}57 + 12{,}66 + 2 \cdot 1{,}022 = 26{,}7\,\mathrm{MeV} = 4{,}28 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}\,. \tag{6.111}$$

Za 1 s Slnko vyprodukuje $3{,}826 \cdot 10^{26}$ J energie. Počet p-p cyklov, ktoré prebehnú za sekundu je

$$n = \frac{0{,}91 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}}{4{,}28 \cdot 10^{-12}} = 8{,}13 \cdot 10^{37}\,. \tag{6.112}$$

(e) V tomto prípade budeme postupovať inak a napíšeme si celkovú bilanciu CNO cyklu. Namiesto zdĺhavého počítania energie z jednotlivých reakcií iba vypočítame rozdiel pokojových hmotností jadier, ktoré do cyklu vstupujú a jadier, ktoré počas neho vzniknú. K tomu ešte nesmieme zabudnúť pripočítať energiu z anihilácie pozitrónov a okolitými elektrónmi.
Vidíme, že všetky jadrá C, N a O, ktoré vzniknú v reakcii sa vzápätí použijú v nasledujúcej reakcii cyklu. Pri CNO cykle sa spotrebujú iba jadrá vodíka a vzniknú jadrá hélia, pozitróny, elektrónové neutrína a fotóny.

$$4\,^1H \to 3\,\gamma \ + \ ^4He + 2\,e^+ + 2\,\nu_e\,, \tag{6.113}$$

$$2\,e^+ + 2\,e^- \to 4\,\gamma\,. \tag{6.114}$$

Energia, ktorá vznikne pri CNO cykle je

$$E_1 = 4 \cdot 938{,}27 - 3727{,}4 - 2 \cdot 0{,}511 = 24{,}658\,\mathrm{MeV}\,, \tag{6.115}$$

$$E_2 = 4 \cdot 0{,}511 = 2{,}044\,\mathrm{MeV}\,, \tag{6.116}$$

$$E = E_1 + E_2 = 24{,}658 + 2{,}044 = 26{,}7\,\mathrm{MeV}\,. \tag{6.117}$$

Vidíme, že jeden CNO cyklus vyprodukuje rovnaké množstvo energie ako jeden protón-protónový cyklus.

Kapitola 7

Kozmológia (riešenia)

7.1 Kategória ZŠ, finále – riešenia

7.1.1 AO 2009, úloha 3, AO 2014, úloha 4 – Dve galaxie – riešenie

(a) Vzdialenosť galaxie B vypočítame z Hubble-Lemaîtrovho zákona

$$r_\mathrm{B} = \frac{v_\mathrm{B}}{H_0} = \frac{18000}{73}\,, \tag{7.1}$$

$$r_\mathrm{B} = 246{,}6\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{7.2}$$

Galaxia B sa nachádza ďalej ako galaxia A.

(b) Rýchlosť galaxie B je len o rád menšia ako rýchlosť svetla, preto použijeme relativistický vzťah pre červený posun, aby sme dostali presnejší výsledok

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_\mathrm{B}}{c}}{1 - \frac{v_\mathrm{B}}{c}}} = \frac{\lambda}{\lambda_0}\,. \tag{7.3}$$

Na konci sme využili definíciu červeného posunu:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\,. \tag{7.4}$$

Čiara vodíka bude mať vlnovú dĺžku

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_\mathrm{B}}{c}}{1 - \frac{v_\mathrm{B}}{c}}}\lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + \frac{18000}{2{,}9979\cdot 10^5}}{1 - \frac{18000}{2{,}9979\cdot 10^5}}} \cdot 121{,}6\,, \tag{7.5}$$

$$\lambda = 129{,}1\,\mathrm{nm}\,. \tag{7.6}$$

(c) Rýchlosť galaxie A vypočítame z Hubblovho zákona

$$v_\mathrm{A} = r_\mathrm{A} H_0 = 10 \cdot 73\,, \tag{7.7}$$

$$v_\mathrm{A} = 730\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{7.8}$$

Rýchlosť galaxie A je malá v porovnaní s rýchlosťou svetla, na výpočet vlnovej dĺžky preto môžeme použiť klasický vzťah pre červený posun.

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = z = \frac{v_\mathrm{A}}{c}\,, \tag{7.9}$$

$$\lambda = \left(\frac{v_\mathrm{A}}{c} + 1\right)\lambda_0 = \left(\frac{730}{2{,}9979\cdot 10^5} + 1\right) \cdot 121{,}6\,, \tag{7.10}$$

$$\lambda = 121{,}9\,\mathrm{nm}\,. \tag{7.11}$$

7.2 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

7.2.1 AO 2007, úloha 3 – riešenie

Z relativistického vzťahu pre červený posun vyjadríme rýchlosť

$$(1+z)^2 = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\,, \tag{7.12}$$

$$(1+z)^2\left(1-\frac{v}{c}\right) = 1+\frac{v}{c}\,, \tag{7.13}$$

$$(1+z)^2 - (1+z)^2\frac{v}{c} = 1+\frac{v}{c}\,, \tag{7.14}$$

$$(1+z)^2 - 1 = \frac{v}{c} + (1+z)^2\frac{v}{c}\,, \tag{7.15}$$

$$\frac{v}{c}\left[1+(1+z)^2\right] = (1+z)^2 - 1\,, \tag{7.16}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}\,, \tag{7.17}$$

$$\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0} = z\,, \tag{7.18}$$

$$z+1 = \frac{\lambda}{\lambda_0}\,, \tag{7.19}$$

$$v = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2-1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2+1}c = \frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2}c\,, \tag{7.20}$$

$$v = \frac{460^2-434^2}{460^2+434^2}\cdot 299790 = 17\,400\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{7.21}$$

7.2.2 AO 2008, úloha 2 – Vzdialenosť galaxie – riešenie

V tomto prípade stačí použiť klasický vzťah pre červený posun a Hubble-Lemaîtrov Zákon

$$v = zc = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}c\,, \tag{7.22}$$

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\frac{c}{H_0}\,, \tag{7.23}$$

$$r = \frac{500{,}7-499{,}5}{499{,}5}\cdot\frac{299790}{73} = 9{,}87\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{7.24}$$

7.2.3 AO 2009, úloha 4 – Čierna diera – riešenie

(a) Pre Schwarzschildov polomer čiernej diery platí vzorec

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}\,. \tag{7.25}$$

Priemer čiernej diery s hmotnosťou Zeme by bol

$$D = 2R_\mathrm{S} = \frac{4GM_\oplus}{c^2} = \frac{4 \cdot 60\,673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}{(2{,}9979 \cdot 10^8)^2} = 0{,}0178\,\mathrm{m} = 17{,}8\,\mathrm{mm}\,. \tag{7.26}$$

(b) Jej hustota by bola

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\mathrm{S}^3} = \frac{6m_\oplus}{\pi D^3} = \frac{6 \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}{\pi \cdot (17{,}8 \cdot 10^{-3})^3}\,, \tag{7.27}$$

$$\rho = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{7.28}$$

(c) Takáto čierna diera by mohla existovať. Jej hmotnosť by bola

$$M = \frac{4}{3}\pi \rho_{\mathrm{H_2O}} R_\mathrm{S}^3\,. \tag{7.29}$$

Hustota vody je približne $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Hmotnosť dosadíme do vzťahu pre R_S a dostaneme

$$R_\mathrm{S} = \frac{8G\pi\rho_{\mathrm{H_2O}}R_\mathrm{S}^3}{3c^2}\,. \tag{7.30}$$

$$R_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho_{\mathrm{H_2O}}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^2}{8\pi \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 1000}}\,, \tag{7.31}$$

$$R_\mathrm{S} = 4 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = 2{,}7\,\mathrm{au}\,. \tag{7.32}$$

7.2.4 AO 2010, úloha 5 – Čierne diery – riešenie

(a) Do vzťahu pre hustotu gule dosadíme Schwarzschildov polomer čiernej diery

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R_\mathrm{S}^3}\,, \tag{7.33}$$

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}\,, \tag{7.34}$$

$$R_\mathrm{S}^3 = \frac{8G^3M^3}{c^6}\,, \tag{7.35}$$

$$\rho = \frac{3Mc^6}{32\pi G^3M^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}\,. \tag{7.36}$$

Hustota prvej čiernej diery je

$$\rho = \frac{3 \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}673 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (108 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30})^2} = 1{,}58 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{7.37}$$

(b) Druhá čierna diera má hustotu

$$\rho = \frac{3 \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}673 \cdot 10^{-11})^3 \cdot (5 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30})^2} = 7{,}38 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{7.38}$$

7.2.5 AO 2011, úloha 2 – riešenie

Galaxia sa od nás vzďaľuje, takže sa vlnová dĺžka čiary posunie dočervena. Rýchlosť si najskôr premeníme do km s^{-1}

$$v = \frac{2{,}5 \cdot 10^6}{3600} = 694{,}4\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{7.39}$$

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = z = \frac{v}{c}\,, \tag{7.40}$$

$$\lambda = \left(\frac{v}{c} + 1\right)\lambda_0 = \left(\frac{694{,}4}{299790} + 1\right) \cdot 656{,}5 = 658\,\mathrm{nm}\,. \tag{7.41}$$

7.2.6 AO 2011, úloha 3 – riešenie

Hustota vody je približne 1000 km m^{-3}. Hmotnosť gule je

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_{\mathrm{H_2O}}R_{\mathrm{S}}^3\,, \tag{7.42}$$

Dosadíme za polomer čiernej diery

$$R_{\mathrm{S}}^3 = \frac{8G^3M^3}{c^6}\,, \tag{7.43}$$

$$M = \frac{4 \cdot 8\pi\rho_{\mathrm{H_2O}}G^3M^3}{3c^6}\,. \tag{7.44}$$

Z rovnosti vyjadríme hmotnosť čiernej diery a dostaneme

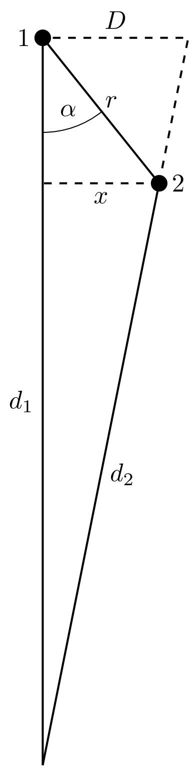
$$M = \sqrt{\frac{3c^6}{32\pi G^3\rho_{\mathrm{H_2O}}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (2{,}9979 \cdot 10^8)^6}{32\pi \cdot (6{,}673 \cdot 10^{-11})^3 \cdot 1000}}\,, \tag{7.45}$$

$$M = 2{,}7 \cdot 10^{38}\,\mathrm{kg} = 1{,}36 \cdot 10^8\,M_\odot\,. \tag{7.46}$$

7.2.7 AO 2015, úloha 3 – Nadsvetelný výtrysk – riešenie

Všetky naše úvahy vychádzajú z obrázku. Signál z bodu 1 je vyslaný v čase 0, k pozorovateľovi na Zemi dorazí v čase $t_1 = \frac{d_1}{c}$. Výtrysk dorazí do bodu 2 v čase $t = \frac{r}{v}$, v tej chvíli vyrazí z bodu 2 svetelný signál, ktorý dorazí k pozorovateľovi o $\frac{d_2}{c}$ neskôr, teda v čase $t_2 = \frac{r}{v} + \frac{d_2}{c}$. Pozorovateľovi sa zdá, že za čas $t_2 - t_1$ prešiel výtrysk vzdialenosť D rýchlosťou $v_{\mathrm{z}} = 10c$

$$\frac{D}{v_{\mathrm{z}}} = t_2 - t_1 = \frac{r}{v} + \frac{d_2}{c} - \frac{d_1}{c}\,. \tag{7.47}$$



Ako bolo uvedené v zadaní, takéto výtrysky sa pozorujú v extragalaktických objektoch. To znamená, že vzdialenosti d_1, d_2 od pozorovateľa k bodom 1 a 2 sú oveľa väčšie ako vzdialenosť r (aj D), ktorú výtrysk prejde počas doby pozorovania. Vďaka tomu môžeme použiť nasledujúce 2 zjednodušené vzťahy pre pomery a rozdiely vzdialeností

$$\frac{x}{d_2} \approx \frac{D}{d_1}\,, \tag{7.48}$$

$$d_1 - d_2 \approx r\cos\alpha\,. \tag{7.49}$$

Úsečka x vychádza z bodu 2 a je kolmá na d_1, jej dĺžka je

$$x = r\sin\alpha\,. \tag{7.50}$$

Všetky tieto predpoklady dosadíme do rovnice 7.47

$$\frac{D}{v_\mathrm{z}} = \frac{r}{v} - \frac{r}{c}\cos\alpha\,, \tag{7.51}$$

$$D \approx \frac{d_1}{d_2}x = \frac{d_1}{d_2}r\sin\alpha \approx r\sin\alpha\,. \tag{7.52}$$

V poslednej rovnosti sme využili, že pomer vzdialeností d_1 a d_2 je približne rovný 1, pretože sú obidve oveľa väčšie ako r (ich rozdiel je ale stále nenulový)

$$\frac{r\sin\alpha}{v_\mathrm{z}} \approx \frac{r}{v} - \frac{r\cos\alpha}{c}\,, \tag{7.53}$$

$$\frac{\sin\alpha}{v_\mathrm{z}} \approx \frac{1}{v} - \frac{\cos\alpha}{c}\,, \tag{7.54}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\sin\alpha}{v_{\mathrm{z}}} + \frac{\cos\alpha}{c}\,, \tag{7.55}$$

$$v = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{v_{\mathrm{z}}} + \frac{\cos\alpha}{c}} = \frac{1}{\frac{\sin 10^\circ}{10c} + \frac{\cos 10^\circ}{c}} = \frac{1}{\frac{\sin 10^\circ}{10c} + \frac{10\cdot\cos 10^\circ}{10c}}\,, \tag{7.56}$$

$$v = \frac{10c}{\sin 10^\circ + \cos 10^\circ} = 0{,}9978c\,. \tag{7.57}$$

Skutočná rýchlosť výtrysku je naozaj nižšia ako rýchlosť svetla.

7.2.8 AO 2015, úloha 4 – Galaxie – riešenie

Pre absolútnu magnitúdu platí vzorec

$$M = m + 5 - 5\log r\,. \tag{7.58}$$

Galaxie so zdanlivou magnitúdou m sa nachádzajú vo sférickej vrstve s polomerom r_{m} a hrúbkou dr. Objem takejto vrstvy je

$$V = 4\pi r_{\mathrm{m}}^2 dr\,. \tag{7.59}$$

Polomer r_m vyjadríme zo vzorca pre absolútnu magnitúdu

$$r_{\mathrm{m}} = 10^{\frac{m+5-M}{5}}\,. \tag{7.60}$$

Počet galaxií vo vrstve je

$$N_{\mathrm{m}} = 4\pi r_{\mathrm{m}}^2 \rho dr\,. \tag{7.61}$$

Podobne, galaxie s rovnakou absolútnou magnitúdou M a zdanlivou magnitúdou m+1 sa nachádzajú v guľovej vrstve s polomerom $r_{\mathrm{m+1}}$ a ich počet je

$$N_{\mathrm{m+1}} = 4\pi r_{m+1}^2 \rho dr\,. \tag{7.62}$$

Pre polomer vrstvy platí

$$r_{\mathrm{m+1}} = 10^{\frac{m+1+5-M}{5}}\,. \tag{7.63}$$

Pomer počtu galaxií je

$$\frac{N_{\mathrm{m+1}}}{N_{\mathrm{m}}} = \frac{r_{\mathrm{m+1}}^2}{r_{\mathrm{m}}^2} = 10^{2\cdot\frac{m+1+5-M}{5} - 2\cdot\frac{m+5-M}{5}} = 10^{\frac{2}{5}}\,. \tag{7.64}$$

7.2.9 AO 2017, úloha 1 – Reliktné žiarenie – riešenie

Pre pomer faktoru škály v súčasnosti a_0 a v minulosti a platí vzorec

$$\frac{a_0}{a} = 1 + z\,. \tag{7.65}$$

Ďalej využijeme dva fakty: hustota energie vákua (teda tmavej energie) sa v čase nemení (ρ_Λ=konštanta) a celková hmotnosť tmavej (aj normálnej) hmoty sa zachováva. Pre hustotu tmavej hmoty potom môžeme písať

$$\rho_{\mathrm{DM}} a^3 = \rho_{\mathrm{DM},0} a_0^3\,. \tag{7.66}$$

Namiesto objemu, ktorý by vystupoval vo vzorci pre hmotnosť $m = \rho V$, sme použili tretiu mocninu faktoru škály, ktorá vlastne popisuje ako sa menia objemy kvôli rozpínaniu vesmíru

$$\frac{a_0^3}{a^3} = \frac{\rho_{\mathrm{DM}}}{\rho_{\mathrm{DM},0}} = (1+z)^3\,. \tag{7.67}$$

Pre pomer hustoty tmavej hmoty a tmavej energie v čase vyžiarenia reliktného žiarenia platí

$$\frac{\rho_{\mathrm{DM}}}{\rho_{\Lambda}} = \frac{\rho_{\mathrm{DM},0}}{\rho_{\Lambda}}(1+z)^3 = \frac{2{,}4}{6{,}7}\cdot(1+1100)^3 = 4{,}8\cdot 10^8\,. \tag{7.68}$$

7.2.10 AO 2019, úloha 2 – Čierna diera – riešenie

(a) Priemer čiernej diery s hmotnosťou Zeme by bol

$$D = 2R_{\mathrm{S}} = \frac{4GM_{\oplus}}{c^2} = \frac{4\cdot 60\,673\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}9736\cdot 10^{24}}{(2{,}9979\cdot 10^8)^2} = 0{,}0178\,\mathrm{m} = 17{,}8\,\mathrm{mm}\,. \tag{7.69}$$

(b) Jej hustota by bola

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M_{\oplus}}{4\pi R_{\mathrm{S}}^3} = \frac{6m_{\oplus}}{\pi D^3} = \frac{6\cdot 5{,}9736\cdot 10^{24}}{\pi\cdot(17{,}8\cdot 10^{-3})^3}\,, \tag{7.70}$$

$$\rho = 2\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{7.71}$$

7.2.11 AO 2019, úloha 4 – Výtrysk jetu – riešenie

Vychádzame z nakresleného obrázku. Na začiatku sme pozorovali jet priamo pri zdroji v polohe 1. Počas 10 rokov jet prešiel vzdialenosť r a nakoniec sa nachádzal v polohe 2. Úsečka x vychádza z bodu 2 a je kolmá na d_1, jej dĺžka je

$$x = r\sin\alpha\,. \tag{7.72}$$

Za 10 rokov mohol výtrysk prejsť maximálne vzdialenosť $r = 10\,\mathrm{ly} = 3\,\mathrm{pc}$, aj to len za predpokladu, že jeho rýchlosť bola veľmi blízka rýchlosti svetla. To znamená, že vzdialenosti d_1, d_2 od pozorovateľa k bodom 1 a 2 sú oveľa väčšie ako vzdialenosti r aj D a približne platí

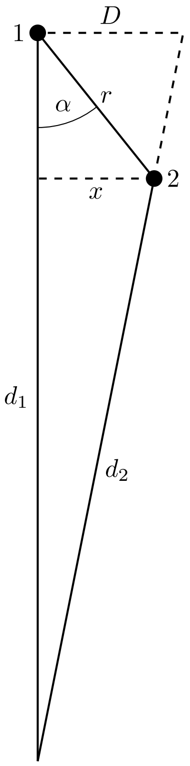
$$D \approx d_1\psi\,. \tag{7.73}$$

Použijeme nasledujúce zjednodušenie pre pomery vzdialeností

$$\frac{x}{d_2} \approx \frac{D}{d_1}\,. \tag{7.74}$$

Keďže vzdialenosť výtrysku od pozorovateľa sa za 10 rokov takmer nezmenila, platí $d_1 \approx d_2 \approx d = 20\,\mathrm{Mpc}$, z čoho dostaneme $x \approx D = r\sin\alpha$. Rýchlosť výtrysku vypočítame jednoducho ako

$$v = \frac{r}{t} = \frac{D}{t\sin\alpha} = \frac{\psi d}{t\sin\alpha}\,, \tag{7.75}$$



$$v = \frac{0{,}0645}{206265} \cdot \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}}{10 \cdot 365{,}25 \cdot 86400 \cdot \sin 30°} = 1{,}22 \cdot 10^9\,\mathrm{m\,s^{-1}} > c\,. \tag{7.76}$$

Vidíme, že nám vyšla hodnota väčšia ako je rýchlosť svetla, preto musíme príklad počítať opatrnejšie a zarátať aj rozdielnu dobu šírenia svetelného signálu z miesta výtrysku k pozorovateľovi. Pomôžu nám nasledujúce úvahy.

Signál z bodu 1 je vyslaný v čase 0, k pozorovateľovi na Zemi dorazí v čase $t_1 = \frac{d_1}{c}$. Výtrysk dorazí do bodu 2 v čase $t = \frac{r}{v}$, v tej chvíli vyrazí z bodu 2 svetelný signál, ktorý dorazí k pozorovateľovi o $\frac{d_2}{c}$ neskôr, teda v čase $t_2 = \frac{r}{v} + \frac{d_2}{c}$.

Pozorovateľovi sa zdá, že za čas $t_2 - t_1 = t = 10$ rokov prešiel výtrysk vzdialenosť $D \approx \psi d$.

$$t = t_2 - t_1 = \frac{r}{v} + \frac{d_2}{c} - \frac{d_1}{c}\,, \tag{7.77}$$

Pre rozdiel vzdialeností platí približný vzťah

$$d_1 - d_2 \approx r \cos\alpha\,, \tag{7.78}$$

$$t = \frac{r}{v} - \frac{r\cos\alpha}{c}\,. \tag{7.79}$$

Rovnicu vydelíme r a potom dosadíme za r na ľavej strane rovnice

$$\frac{t}{r} = \frac{1}{v} - \frac{\cos\alpha}{c}\,, \tag{7.80}$$

$$\frac{t\sin\alpha}{D} = \frac{t\sin\alpha}{\psi d} = \frac{1}{v} - \frac{\cos\alpha}{c}\,. \tag{7.81}$$

Teraz už stačí iba z rovnice vyjadriť rýchlosť v

$$\frac{1}{v} = \frac{t\sin\alpha}{\psi d} + \frac{\cos\alpha}{c}\,, \tag{7.82}$$

$$v = \frac{1}{\frac{t \sin\alpha}{\psi d} + \frac{\cos\alpha}{c}} = \frac{1}{\frac{10 \cdot 365{,}25 \cdot 86400 \sin 30° \cdot 206265}{20 \cdot 10^6 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}0645} + \frac{\cos 30°}{2{,}9979 \cdot 10^8}}\,, \tag{7.83}$$

$$v = 2{,}7 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 0{,}9c\,. \tag{7.84}$$

Rýchlosť výtrysku nám tentokrát správne vyšla už nižšia ako rýchlosť svetla.

7.2.12 AO 2020, úloha 1 – Galaxia – riešenie

(a) Rýchlosť vypočítame z relativistického vzorca pre červený posun.

$$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}\,, \tag{7.85}$$

$$z + 1 = \frac{\lambda}{\lambda_0}\,, \tag{7.86}$$

$$v = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} c\,, \tag{7.87}$$

$$v = \frac{452{,}3^2 - 279{,}8^2}{452{,}3^2 + 279{,}8^2} \cdot 299790 = 134\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{7.88}$$

(b) Pozorujeme červený posun spôsobený rozpínaním vesmíru, galaxia sa od nás vzďaľuje.

(c) Vzdialenosť galaxie získame z Hubble Lemaîtrovho zákona

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{134000}{73} = 1840\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{7.89}$$

7.2.13 AO 2023, úloha 3 – Čierna diera – riešenie

Pre Schwarzschildov polomer čiernej diery platí vzorec

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}{(2{,}9979 \cdot 10^8)^2} = 5{,}9 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m} = 3950\,\mathrm{au}\,. \tag{7.90}$$

Čierna diera by bola o dva rády väčšia než sú rozmery dráhy najvzdialenejšej planéty od Slnka (Neptún, $a_\mathrm{N} = 30{,}178\,\mathrm{au}$). V porovnaní s Oortovým oblakom s rozmermi odhadovanými až na 200 000 au by ale bola stále o niekoľko rádov menšia.

7.3 Kategória SŠ, finále – riešenia

7.3.1 AO 2007, úloha 3 – riešenie

(a) Rýchlosť vypočítame z relativistického vzorca pre červený posun.

$$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}\,, \tag{7.91}$$

$$z + 1 = \frac{\lambda}{\lambda_0}\,, \tag{7.92}$$

$$v = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} c\,, \tag{7.93}$$

$$v = \frac{452{,}3^2 - 279{,}8^2}{452{,}3^2 + 279{,}8^2} \cdot 299790 = 134\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{7.94}$$

(b) Galaxia sa od nás vzďaľuje (červený posun je spôsobený rozpínaním vesmíru).

(c) Vzdialenosť galaxie získame z Hubble Lemaîtrovho zákona

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{134000}{73} = 1840\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{7.95}$$

7.3.2 AO 2013, úloha 3 – riešenie

Ak predpokladáme, že od vzniku reliktného žiarenia až po súčasnosť vo vesmíre dominovala hmota, pre faktor škály a vek vesmíru platí

$$a \sim t^{2/3}\,. \tag{7.96}$$

Červený posun z súvisí s faktorom škály vzťahom

$$\frac{a_0}{a} = 1 + z\,, \tag{7.97}$$

$$1 + z = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3}\,, \tag{7.98}$$

$$z = \left(\frac{13{,}8 \cdot 10^9}{3{,}9 \cdot 10^5}\right)^{2/3} - 1 = 1077\,. \tag{7.99}$$

Maximum vyžarovania bolo vtedy na vlnovej dĺžke λ_0

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\,, \tag{7.100}$$

$$\lambda = (z+1)\lambda_0\,, \tag{7.101}$$

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1+z} = \frac{1{,}06 \cdot 10^{-3}}{1078} = 983\,\mathrm{nm}\,. \tag{7.102}$$

7.3.3 AO 2016, úloha 3 – riešenie

Vzdialenosť rádiového zdroja odhadneme z Hubble Lemaîtrovho zákona, pričom na výpočet rýchlosti použijeme relativistický vzorec pre červený posun

$$r = \frac{v}{H_0}\,, \tag{7.103}$$

$$v = \frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}c\,, \tag{7.104}$$

$$r = \frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}\frac{c}{H_0}\,, \tag{7.105}$$

$$r = \frac{(1{,}5)^2-1}{(1{,}5)^2+1}\frac{299790}{73} = 1580\,\mathrm{Mpc}\,. \tag{7.106}$$

Uhlový rozmer zdroja je veľmi malý, jeho lineárny rozmer preto môžeme vypočítať pomocou približného vzťahu

$$D \approx \alpha r = \frac{0{,}001 \cdot 1580}{206265} = 7{,}66 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Mpc} = 7{,}66\,\mathrm{pc}\,. \tag{7.107}$$

7.3.4 AO 2023, úloha 3.2 – O vesmíre – riešenie

Hustota tmavej energie sa nemení, takže jej hodnota je stále $\rho_{\mathrm{DE},0} = 0{,}691 \cdot 9 \cdot 10^{-27} = 6{,}22 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Závislosť medzi hustotou normálnej (aj tmavej) hmoty a škálovým faktorom si zjednodušene môžeme odôvodniť s pomocou predstavy vesmíru, v ktorom sa nemení celková hmotnosť normálnej (tmavej) hmoty. Potom platí

$$\rho a^3 \propto m\,. \tag{7.108}$$

Z toho dostaneme

$$\rho \propto a^{-3}\,. \tag{7.109}$$

Všetky veličiny, ktoré sa týkajú súčasnosti si označíme indexom 0. Zo zadania poznáme úmernosť medzi faktorom škály a časom. Obidve úmernosti si prepíšeme ako pomery veličín v súčasnosti t_0 a v čase t

$$\frac{a_0}{a} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{-1/3}\,, \tag{7.110}$$

$$\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 = \frac{\rho}{\rho_0}\,, \tag{7.111}$$

$$\rho = \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \rho_0 = \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \Omega_0 \rho_\mathrm{c}\,. \tag{7.112}$$

Po číselnom dosadení dostaneme hustotu normálnej hmoty a tmavej hmoty

$$\rho_{NM} = \left(\frac{14}{8}\right)^2 \cdot 0{,}049 \cdot 9 \cdot 10^{-27} = 1{,}35 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,, \tag{7.113}$$

$$\rho_{DM} = \left(\frac{14}{8}\right)^2 \cdot 0{,}259 \cdot 9 \cdot 10^{-27} = 7{,}14 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,. \tag{7.114}$$

Kapitola 8

Rozsiahle príklady (riešenia)

8.1 Kategória ZŠ, domáce kolo – riešenia

8.1.1 AO 2007, úloha 5 – riešenie

(a) Celkovo potrebujeme 800 pixelmi pokryť rektascenziu v rozsahu $220° - 140° = 80°$. Na jeden stupeň pripadá $k = 10$ pixelov.

(b) Na výšku máme 600 pixelov, dokážeme pokryť deklináciu s rozsahom $\frac{600}{k} = \frac{600}{10} = 60°$. Keďže rovník má prechádzať stredom, pri dolnom okraji musí byť deklinácia $-30°$ a pri hornom okraji deklinácia $30°$.

(c) V bode v ľavom dolnom rohu so súradnicami $(x{,}y) = (0{,}0)$ musia byť rektascenzia a deklinácia $(\alpha{,}\delta) = (140°{,}-30°)$. Súradnice x a y sú lineárne závislé na α a δ, preto pre ne musia platiť rovnice

$$x = k\alpha + a\,, \tag{8.1}$$

$$y = k\delta + d\,. \tag{8.2}$$

Dosadením požadovaných hodnôt v ľavom dolnom rohu dostaneme a a d

$$0 = 10 \cdot 140° + a\,, \tag{8.3}$$

$$0 = 10 \cdot (-30°) + d\,. \tag{8.4}$$

Vyjdú hodnoty $a = -1400$ a $d = 300$.

(d) Rektascenzia hviezdy Regulus prepočítaná na stupne je $\alpha = 152°$, deklinácia je $\delta = -11{,}97°$. Dosadíme ich do rovníc odvodených v časti c), $x = 10 \cdot 152° - 1400 = 120$, $y = -10 \cdot 11{,}97° + 300 = 180{,}3$. Hviezda Regulus bude mať súradnice $(x{,}y) = (120{,}180)$.

(e) Hviezda 0. magnitúdy je 100-krát jasnejšia ako hviezda 5. magnitúdy.

$$\frac{I_0}{I_5} = 100 = \frac{D_0^2}{D_5^2} = \frac{D_0^2}{1}\,. \tag{8.5}$$

Priemer kotúčika hviezdy 0. magnitúdy bude $D_0 = 10$ pixelov.

8.2 Kategória ZŠ, finále – riešenia

8.2.1 A0 2007, úloha 5 – riešenie

(a) Uhlový priemer Mesiaca je

$$\theta_{☾} = \frac{2R_{☾}}{a_{☾}} = \frac{2 \cdot 1{,}7374 \cdot 10^6}{3{,}844 \cdot 10^8} \cdot 206265 = 1865'' \,. \tag{8.6}$$

(b) Na jasnosť Mesiaca má väčší vplyv jeho fáza než jeho vzdialenosť od Zeme. Za predpokladu, že v apogeu je Mesiac napr. v prvej štvrti a perigeu v poslednej štvrti môžeme počítať

$$\frac{I_{\rm p}}{I_{\rm a}} = \frac{r_{\rm a}^2}{r_{\rm p}^2} = \frac{405^2}{360^2} = 1{,}27 \,. \tag{8.7}$$

Mesiac by bol v perigeu o 27% jasnejší.

(c) Uhlový priemer Mesiaca v apogeu je

$$\theta_{☾} = \frac{2R_{☾}}{a_{☾}(1+e_{☾})} = \frac{2 \cdot 1{,}7374 \cdot 10^6}{3{,}844 \cdot 10^8 \cdot (1+0{,}0549)} \cdot 206265 = 1768'' \,. \tag{8.8}$$

Uhlový priemer Slnka pre Zem v aféliu je

$$\theta_{\odot} = \frac{2R_{\odot}}{a_{\oplus}(1+e_{\oplus})} = \frac{2 \cdot 6{,}955 \cdot 10^8}{1{,}496 \cdot 10^{11} \cdot (1+0{,}0167)} \cdot 206265 = 1886'' \,. \tag{8.9}$$

Uhlový priemer Mesiaca je menší ako uhlový priemer Slnka, nastane preto prstencové zatmenie.

8.2.2 AO 2008, úloha 4 – Zákrytová dvojhviezda – riešenie

(a) Z tabuľky vidno, že sa hodnoty nameraných vlnových dĺžok začínajú opakovať po uplynutí 3 dní, perióda je preto $P = 3\,$dní.

(b) Maximálna vlnová dĺžka prvej zložky je $\lambda_{1,\rm max} = 5897{,}7\,$Å, maximálna vlnová dĺžka druhej zložky je $\lambda_{2,\rm max} = 5899{,}0\,$Å. Semi-amplitúdy radiálnych rýchlostí hviezd sú

$$v_{1,\rm max} = \frac{\lambda_{1,\rm max} - \lambda_0}{\lambda_0} c = \frac{97{,}7 - 95{,}9}{5895{,}9} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 91{,}5\,{\rm km\,s^{-1}} \,, \tag{8.10}$$

$$v_{2,\rm max} = \frac{\lambda_{2,\rm max} - \lambda_0}{\lambda_0} c = \frac{99{,}0 - 95{,}9}{5895{,}9} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 157{,}6\,{\rm km\,s^{-1}} \,. \tag{8.11}$$

Pomer hmotností hviezd sa rovná prevrátenému pomeru semi-amplitúd radiálnych rýchlostí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_{2,\rm max}}{v_{1,\rm max}} = \frac{157{,}6}{91{,}5} = 1{,}72 \,. \tag{8.12}$$

8.2.3 AO 2011, úloha 4, AO 2013, úloha 3 – riešenie

Obiehanie Zeme okolo Slnka spôsobuje, že sa pozorovateľ na Zemi pohybuje voči hviezdam. To spôsobí v spektre hviezd Dopplerov posun, pričom tento efekt bude najvýraznejší pre hviezdy, ku ktorým smeruje okamžitá rýchlosť Zeme (modrý posun) a pre hviezdy na presne opačnej strane nebeskej sféry (červený posun). Tento Dopplerov posun bude mať veľkosť $\Delta\lambda$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}\,. \tag{8.13}$$

Obežná rýchlosť Zeme okolo Slnka je

$$v = \frac{2\pi a}{P}\,, \tag{8.14}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{2{,}9979 \cdot 10^{8} \cdot 365{,}25 \cdot 86400} = 5{,}5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} = 0{,}055\,\mathrm{nm}\,. \tag{8.15}$$

8.3 Kategória SŠ, domáce kolo – riešenia

8.3.1 AO 2007, úloha 1 – riešenie

(a) Veľkú polos vypočítame 3. Keplerovho zákona

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{125^2} = 25\,\mathrm{au}\,. \tag{8.16}$$

(b) Kruhová rýchlosť je

$$v = \frac{2\pi a}{P} = \frac{2\pi \cdot 25 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{125 \cdot 365{,}25 \cdot 86400} = 5{,}96\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{8.17}$$

(c) Relatívne voči Zemi prejde túto vzdialenosť za čas

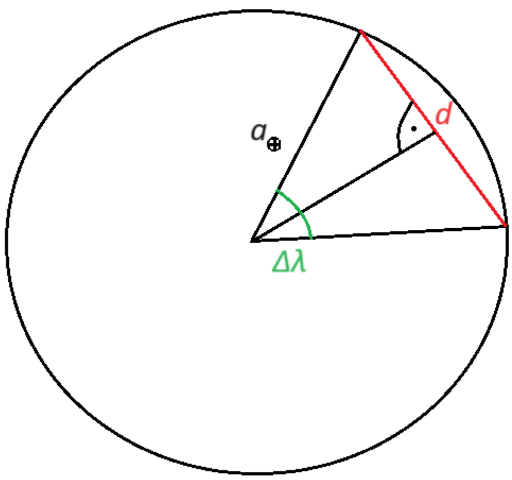
$$t = \frac{2R_\oplus}{v_g} = \frac{2 \cdot 6378}{60} = 213\,\mathrm{s} = 3{,}5\,\mathrm{min}\,. \tag{8.18}$$

(d) Zem prechádza dráhou kométy v čase, kedy je ekliptikálna dĺžka Slnka 140°. Počas jarnej rovnodennosti sa Slnko nachádza j jarnom bode a jeho ekliptikálna dĺžka je 0°. Uhol 140° prejde Zem za čas

$$\frac{140°}{360°} \cdot 365{,}25 = 142{,}04\,\text{dní} = 142\,\text{dní}\ 1\,\mathrm{h}\,. \tag{8.19}$$

V roku 2007, kedy bol zadaný tento príklad, nastala jarná rovnodennosť 21.3. o 1:00. Do 31.3. uplynulo 10 dní, apríl má 30 dní, máj 31 dní, jún 30 dní a júl 31 dní. Od 21.3. 0 1:00 do 31.7. o 1:00 uplynulo celkovo 11+30+31+30+31=133 dní. Do maxima roja uplynie ešte 10 dní a 1 hodina. Maximum nastalo 10.8. o 2:00.

(e) Počas jesennej rovnodennosti je ekliptikálna dĺžka Slnka 180°, ekliptikálna dĺžka Zeme meraná zo Slnka je vtedy 0°. 4 dni pred jesennou rovnodennosťou je ekliptikálna dĺžka Zeme zhruba 356°. Priesečník dráh sa nachádza na ekliptikálnej dĺžke 140° + 180° = 320°. Vzdialenosť kométy od Zeme vypočítame na základe obrázku nižšie



$$\frac{d}{2a_\oplus} = \sin\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right) , \tag{8.20}$$

$$d = 2a_\oplus \sin\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{356° - 320°}{2}\right) = 0{,}6\,\mathrm{au}\,. \tag{8.21}$$

(f) Absolútna magnitúda komety je definovaná ako magnitúda, ktorú by kométy, keď sa nachádza vo vzdialenosti1 au od Slnka aj od Zeme. V našom prípade sa už nachádza vo vzdialenosti 1 au od Slnka, preto treba počítať iba s korekciou na vzdialenosť od Zeme

$$M - m = 2{,}5 \log\left(\frac{(1\,\mathrm{au})^2}{d^2}\right) = 5 \log\left(\frac{1\,\mathrm{au}}{d}\right) , \tag{8.22}$$

$$M = 6 + 5 \log\left(\frac{1\,\mathrm{au}}{0{,}6}\right) = 7{,}1\,\mathrm{mag}\,. \tag{8.23}$$

8.3.2 AO 2009, úloha 3 – riešenie

(a) Pomer hmotností hviezd sa rovná prevrátenému pomeru amplitúd ich rýchlostí. Veľkosť Dopplerovho posunu je priamo úmerná rýchlosti hviezd.

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{0{,}052}{0{,}026} = 2\,. \tag{8.24}$$

(b) Hmotnejšia je zložka č. 1.

(c) Obidve hviezdy sa pohybujú kruhovými rýchlosťami, ktorých veľkosť vieme vypočítať z Dopplerovho posunu (sklon dráhy nie je v úlohe uvedený, jedná sa ale o zákrytovú dvojhviezdu, preto odhadneme, že je 90°, čo nám trochu zjednoduší výpočet). Polomery kruhových dráh sú a_1 a a_2.

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P} = \frac{\Delta_1 c}{\lambda_0} , \tag{8.25}$$

$$v_2 = \frac{2\pi a_2}{P} = \frac{\Delta_2 c}{\lambda_0} . \tag{8.26}$$

Zo vzorcov si vyjadríme polomery dráh a vypočítame ich súčet a. Ten dosadíme do 3 Keplerovho zákona, z ktorého zistíme súčet hmotností.

$$a_1 = \frac{\Delta_1 P c}{2\pi\lambda_0} , \tag{8.27}$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2 P c}{2\pi\lambda_0} , \tag{8.28}$$

$$a = a_1 + a_2 = \frac{Pc}{2\pi\lambda_0}(\Delta_1 + \Delta_2) , \tag{8.29}$$

$$a = \frac{8{,}6 \cdot 365{,}25 \cdot 86400 \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 656{,}273} \cdot (0{,}052 + 0{,}026) = 1{,}54 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m} = 10{,}29\,\mathrm{au}\,, \tag{8.30}$$

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{P^2} = \frac{10{,}29^3}{8{,}6^2} = 14{,}73\,M_\odot\,. \tag{8.31}$$

Hmotnosti jednotlivých zložiek sú

$$M_1 = \frac{2}{3}(M_1 + M_2) = 9{,}82\,M_\odot\,, \tag{8.32}$$

$$M_2 = \frac{1}{3}(M_1 + M_2) = 4{,}91\,M_\odot\,. \tag{8.33}$$

8.3.3 AO 2014, úloha 4 – Milisekundový pulzar – riešenie

Dopplerov posun vo frekvencii pulzaru aj vo vlnovej dĺžke čiary vápnika nastáva kvôli vzájomnému obehu pulzaru a hviezdy. Ak predpokladáme sklon dráhy 90°, ich obežné rýchlosti vieme dopočítať priamo zo vzorca pre Dopplerov jav

$$\frac{v_\mathrm{p}}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{f} - \frac{c}{f_0}}{\frac{c}{f_0}} = \frac{f_0 - f}{f}\,. \tag{8.34}$$

Vlastná frekvencia pulzaru je priemerom jej krajných nameraných hodnôt

$$f_0 = \frac{699{,}650175 + 700{,}350175}{2} = 700{,}000\,175\,\mathrm{Hz}\,, \tag{8.35}$$

$$v_\mathrm{p} = \frac{f_0 - f_1}{f_1}c = \frac{700{,}000175 - 699{,}650175}{699{,}650175} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 150\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{8.36}$$

Rýchlosť hviezdy je

$$v_\mathrm{h} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}c = \frac{0{,}63}{3933{,}66} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 48\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{8.37}$$

Veľká polos vzájomnej dráhy dvojhviezdy je súčtom veľkých polosí jednotlivých zložiek

$$a = a_\mathrm{p} + a_\mathrm{h} = \frac{Pv_\mathrm{p}}{2\pi} + \frac{Pv_\mathrm{h}}{2\pi} = \frac{P}{2\pi}(v_\mathrm{p} + v_\mathrm{h})\,, \tag{8.38}$$

$$\frac{4{,}5 \cdot 86400}{2\pi} \cdot (150 + 48) \cdot 10^3 = 1{,}23 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 0{,}08\,\mathrm{au}\,. \tag{8.39}$$

8.3.4 AO 2021, úloha 2 – Zachytenie statického bolidu – riešenie

(a) Svetelnosť ďalekohľadu je pomer jeho priemeru a ohniskovej vzdialenosti.

$$\frac{D}{f} = \frac{51}{250} \approx \frac{1}{5}\,. \tag{8.40}$$

Táto veličina sa niekedy nazýva aj f-číslo a udáva sa v tvare

$$\frac{f}{5}\,. \tag{8.41}$$

(b) Rozlišovacia schopnosť ďalekohľadu je

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = 1{,}22 \cdot \frac{5889{,}95 \cdot 10^{-10}}{0{,}051} = 1{,}41 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad} = 2{,}9''\,. \tag{8.42}$$

(c) Bodový objekt v nekonečne pozorujeme kvôli rozlišovacej schopnosti ďalekohľadu efektívne ako objekt s uhlovým priemerom θ. Po prejdení svetla ďalekohľadom bude mať takýto objekt na snímači veľkosť x, pre ktorú platí

$$\frac{x}{f} = \tan\theta \approx \theta\,. \tag{8.43}$$

Využili sme, že uhol θ nám vyšiel veľmi malý.

$$x = f\theta = 0{,}25 \cdot 1{,}41 \cdot 10^{-5} = 3{,}5\,\mu\mathrm{m}\,. \tag{8.44}$$

Rozmer obrazu bodového zdroja na snímači je iba 3,5 µm, to je menej ako rozmer jediného pixelu (9 µm), zobrazí sa iba na jediný pixel. Rozlišovacia schopnosť kamery je teda $\Delta = 1$ px.

(d) Pozorovanie ovplyvňuje hlavne seeing, teda pohyby atmosféry v dôsledku pohybov más vzduchu. Druhotne majú vplyv určite aj optické a elektronické chyby ďalekohľadu a kamery.

(e) Z rozdielu magnitúd vieme, že bolid bol 100-krát jasnejší ako Vega. To znamená, že svetelný tok F_0 od bolidu na ďalekohľad bol 100-krát väčší ako svetelný tok od Vegy.

$$F_0 = 100F_V = 100\frac{L_\mathrm{V}}{4\pi r_\mathrm{V}^2} = 100\frac{58L_\odot}{4\pi r_\mathrm{V}^2}\,, \tag{8.45}$$

$$F_0 = 100 \cdot \frac{58 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (7{,}8 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16})^2} = 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{8.46}$$

Výkon zachytený celou plochou ďalekohľadu je

$$P = \frac{\pi D^2}{4}F_0\,. \tag{8.47}$$

Tento výkon prejde cez ďalekohľad a sústredí sa na kruhovú plochu s priemerom x. Tok na snímač teda bude

$$F = \frac{P}{\frac{\pi x^2}{4}} = F_0\frac{D^2}{x^2} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0{,}051^2}{(3{,}5 \cdot 10^{-6})^2} = 640\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{8.48}$$

(f) Vzdialenosť bolidu je

$$l = \sqrt{L^2 + H^2}\,. \tag{8.49}$$

Jeho uhlový priemer je

$$\phi = \frac{d}{l} = \frac{d}{\sqrt{L^2 + H^2}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{(80 \cdot 10^3)^2 + (100 \cdot 10^3)^2}} = 7{,}8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad} = 0{,}16''\,. \tag{8.50}$$

Uhlový rozmer bolidu je menší ako rozlišovacia schopnosť ďalekohľadu, takže výsledok úlohy (e) tým nebude ovplyvnený.

(g) Ak predpokladáme, že bolid je statický zdroj v nekonečne, tak sa na oblohe pohybuje iba kvôli rotácii Zeme. Za čas T sa Zem otočí o uhol ε

$$\frac{\varepsilon}{T} = \frac{360°}{P_{\mathrm{sid}}}\,, \tag{8.51}$$

$$\varepsilon = \frac{6 \cdot 360°}{23 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 4} = 0{,}025° = 1{,}5'\,. \tag{8.52}$$

(h) Z kosínusovej vety pre sférický trojuholník sa dá odvodiť nasledujúci vzťah medzi výškou nad obzorom h, deklináciou δ, zemepisnou šírkou φ a hodinovým uhlom t

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t\,. \tag{8.53}$$

Meteor sa nachádza na rovníku, jeho deklinácia je teda $\delta = 0°$, vďaka tomu sa tento vzťah ešte zjednoduší. Výška meteoru nad horizontom je

$$\tan h = \frac{H}{L} = \frac{80}{100}\,. \tag{8.54}$$

Vyjde $h = 38{,}7°$ a pre hodinový uhol dostaneme

$$\sin h = \cos\varphi \cos t\,, \tag{8.55}$$

$$t = \arccos\left(\frac{\sin h}{\cos\varphi}\right) = \arccos\left(\frac{\sin 38{,}7°}{\cos 48{,}97°}\right) = 17{,}7° = 1^{\mathrm{h}}\ 11^{\mathrm{m}}\,. \tag{8.56}$$

(i) V časti (g) sme vypočítali, že meteor sa za 6 sekúnd pohne o uhol $1{,}5'$. To znamená, že jeho obraz na snímači sa pohne o niekoľko pixelov. Na jeden pixel pripadá uhol

$$\frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 206265}{0{,}25} = 7{,}4''\,. \tag{8.57}$$

Počet pixelov, cez ktoré prešiel obraz meteoru je

$$\frac{1{,}5 \cdot 60}{7{,}4} = 12\,. \tag{8.58}$$

Na jeden pixel teda dopadať tok energie F iba po dobu $0{,}5\,\mathrm{s}$, pričom nebude dopadať na celý pixel, ale iba na plôšku s priemerom x (viď úlohy c), e)). Energia, ktorú zachytí jeden pixel je

$$E = \eta_0 \eta_S F \frac{T}{12} \pi \frac{x^2}{4} = 0{,}99 \cdot 0{,}7 \cdot 640 \cdot \frac{6}{12} \cdot \pi \cdot \frac{(3{,}5 \cdot 10^{-6})^2}{4} = 2{,}1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J} = 2{,}1\,\mathrm{nJ}\,. \tag{8.59}$$

To je viac ako aktivačná energia $1\,\mathrm{nJ}$, kamera preto bolid zachytí.

8.4 Kategória SŠ, finále – riešenia

8.4.1 AO 2008, úloha 4 – Zákrytový binárny systém – riešenie

(a) Z tabuľky vidno, že sa hodnoty nameraných vlnových dĺžok začínajú opakovať po uplynutí 3 dní, perióda je preto $P = 3$ dní. Maximálna vlnová dĺžka prvej zložky je $\lambda_{1,\max} = 5897{,}7$ Å, maximálna vlnová dĺžka druhej zložky je $\lambda_{2,\max} = 5899{,}0$ Å. Semi-amplitúdy radiálnych rýchlostí hviezd sú

$$v_{1,\max} = \frac{\lambda_{1,\max} - \lambda_0}{\lambda_0} c = \frac{97{,}7 - 95{,}9}{5895{,}9} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 91{,}5\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,, \tag{8.60}$$

$$v_{2,\max} = \frac{\lambda_{2,max} - \lambda_0}{\lambda_0} c = \frac{99{,}0 - 95{,}9}{5895{,}9} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 157{,}6\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{8.61}$$

Pomer hmotností hviezd sa rovná prevrátenému pomeru semi-amplitúd radiálnych rýchlostí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_{2,\max}}{v_{1,\max}} = \frac{157{,}6}{91{,}5} = 1{,}72\,. \tag{8.62}$$

Vypočítame polomery dráh jednotlivých hviezd a potom ich súčet

$$a_1 = \frac{v_1 P}{2\pi}\,, \tag{8.63}$$

$$a_2 = \frac{v_2 P}{2\pi}\,, \tag{8.64}$$

$$a = a_1 + a_2 = \frac{P}{2\pi}(v_1 + v_2) = \frac{3 \cdot 86400}{2\pi} \cdot (91{,}5 + 157{,}6) \cdot 10^3 = 1{,}03 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}\,. \tag{8.65}$$

Z 3. Keplerovho zákona dostaneme súčet hmotností

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}03 \cdot 10^{10})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3 \cdot 86400)^2} = 9{,}63 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = 4{,}84\,M_\odot\,. \tag{8.66}$$

Hmotnosti jednotlivých hviezd sú

$$M_2 = \frac{4{,}82}{2{,}72} = 1{,}78\,M_\odot\,, \tag{8.67}$$

$$M_1 = 1{,}78 \cdot 1{,}72 = 3{,}06\,M_\odot\,. \tag{8.68}$$

(b) Relatívne intenzity v primárnom a sekundárnom minime si označíme $f_\mathrm{p} = 0{,}63$ a $f_\mathrm{s} = 0{,}9$. Pretože podľa zadania úlohy môžeme predpokladať, že dochádza ku stredovému zákrytu a hviezda 2 je menšia ako hviezda 1, počas sekundárneho minima je hviezda 2 úplne zakrytá. Preto platí

$$f_\mathrm{s} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}\,. \tag{8.69}$$

V primárnom minime je zakrytá iba časť hviezdy 1, preto platí

$$f_\mathrm{p} = \frac{L_1 - 4\pi R_2^2 \sigma T_1^4 + L_2}{L_1 + L_2} = \frac{L_1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} L_1 + L_2}{L_1 + L_2} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{L_1}{L_1 + L_2}\,, \tag{8.70}$$

$$f_\mathrm{p} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 f_\mathrm{s}\,. \tag{8.71}$$

Pre pomer polomerov hviezd dostaneme

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{1 - f_\mathrm{p}}{f_\mathrm{s}}\,, \tag{8.72}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{f_s}{1 - f_p}} = \sqrt{\frac{0{,}9}{1 - 0{,}63}} = 1{,}56\,. \tag{8.73}$$

Zo vzorca pre f_s si vyjadríme pomer svietivostí a dosadíme doň zistený pomer polomerov, vďaka tomu získame pomer teplôt

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\frac{T_2^4}{T_1^4} = \frac{1}{f_\mathrm{s}} - 1 = \frac{1 - f_\mathrm{s}}{f_\mathrm{s}}\,, \tag{8.74}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{f_\mathrm{s}}{1 - f_\mathrm{s}}}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}9}{1 - 0{,}9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1{,}56}} = 1{,}39\,. \tag{8.75}$$

(c) Zo vzťahu medzi hmotnosťou a luminozitou vypočítame luminozity oboch hviezd

$$L_1 = \left(\frac{M_1}{M_\odot}\right)^{3{,}8} L_\odot = 3{,}06^{3{,}8} \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26} = 2{,}68 \cdot 10^{28}\,\mathrm{W}\,, \tag{8.76}$$

$$L_2 = \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right)^{3{,}8} L_\odot = 1{,}78^{3{,}8} \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26} = 3{,}42 \cdot 10^{27}\,\mathrm{W}\,. \tag{8.77}$$

Na Zemi nameriame mimo zákrytov tok dvojhviezdy

$$F = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}\,. \tag{8.78}$$

Vzdialenosť dvojhviezdy je označená d. Dráhy sú kruhové, vzdialenosť zložiek sa nemení, preto sa nemení ani ich uhlová vzdialenosť, ktorá je

$$\alpha = \frac{a}{d} = \sqrt{\frac{4\pi F}{L_1 + L_2}} a = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-9}}{2{,}68 \cdot 10^{28} + 3{,}42 \cdot 10^{27}}} \cdot 1{,}03 \cdot 10^{10} = 1{,}45 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{rad} = 0{,}003''\,. \tag{8.79}$$

8.4.2 AO 2011, úloha 2, AO 2015, úloha 1 – riešenie

Najskôr vypočítame polomery dráh jednotlivých hviezd

$$a_1 = \frac{v_1 P}{2\pi} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 86400}{2\pi} = 1{,}24 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}\,, \tag{8.80}$$

$$a_2 = \frac{v_2 P}{2\pi} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 86400}{2\pi} = 1{,}65 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}\,. \tag{8.81}$$

Súčet $a = a_1 + a_2 = 1{,}24 \cdot 10^{10} + 1{,}65 \cdot 10^{10} = 2{,}89 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$ nám dá veľkú polos vzájomnej dráhy dvojhviezdy. Dosadíme ho do 3. Keplerovho zákona a vypočítame súčet hmotností hviezd

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (2{,}89 \cdot 10^{10})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (30 \cdot 86400)^2} = 2{,}13 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = 1{,}07\,M_\odot\,. \tag{8.82}$$

Pomer hmotností hviezd sa rovná prevrátenému pomeru ich rýchlostí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}\,. \tag{8.83}$$

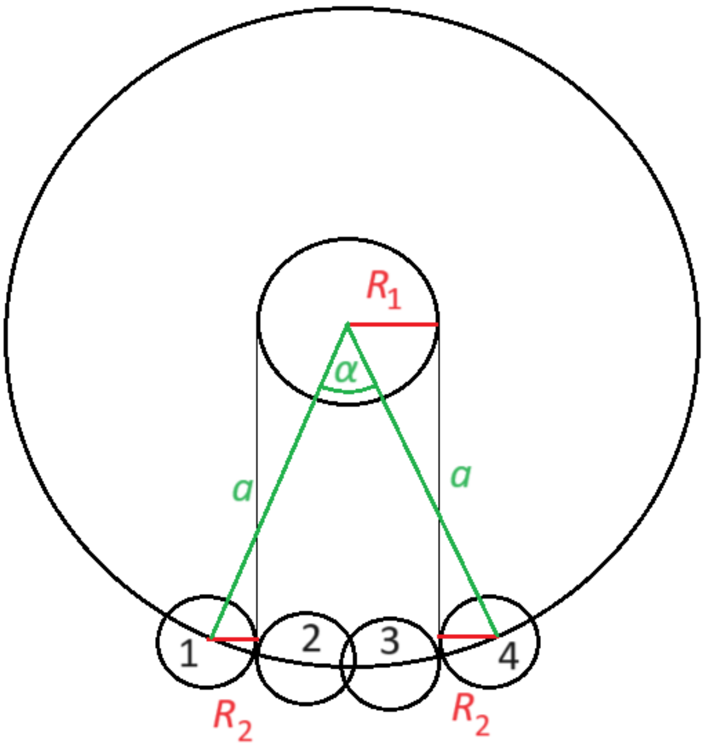
Hmotnosť primáru je

$$M_1 = \frac{4}{7}(M_1 + M_2) = \frac{4}{7} \cdot 1{,}07 = 0{,}61\,M_\odot\,. \tag{8.84}$$

Hmotnosť sekundáru je

$$M_2 = \frac{3}{7}(M_1 + M_2) = \frac{3}{7} \cdot 1{,}07 = 0{,}46\,M_\odot\,. \tag{8.85}$$

Pri výpočte polomerov hviezd budeme uvažovať relatívnu dráhu, kedy primárna hviezdy stojí na mieste a sekundárna hviezda okolo nej obieha rýchlosťou $v = v_1 + v_2 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ po dráhe s polomerom $a = 2{,}89 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$. Poloha sekundárnej hviezdy na dráhe pri všetkých 4 kontaktoch je znázornená na obrázku.



Medzi 1. a 4. kontaktom obehne sekundárna hviezda okolo primárnej o uhol α, pre ktorý platí

$$\alpha = \frac{t_{14}}{P} 360° = \frac{8}{30 \cdot 24} \cdot 360° = 4°\,. \tag{8.86}$$

Zároveň z geometrie na obrázku vidíme, že pre uhol α platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R_1 + R_2}{a}\,. \tag{8.87}$$

Podobne prídeme na to, že medzi 2. a 3. kontaktom obehne sekundárna hviezda okolo primárnej o uhol β, pre ktorý platia vzťahy

$$\beta = \frac{t_{23}}{P}360° = \frac{60+18}{30\cdot 24\cdot 60}\cdot 360° = 0{,}65°\,, \tag{8.88}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{R_1 - R_2}{a}\,. \tag{8.89}$$

Súčet a rozdiel polomerov hviezd sú

$$R_1 + R_2 = a\sin\frac{\alpha}{2} = 2{,}89\cdot 10^{10}\cdot\sin 2° = 1{,}01\cdot 10^{9}\,\mathrm{m} = 1{,}45\,R_\odot\,, \tag{8.90}$$

$$R_1 - R_2 = a\sin\frac{\beta}{2} = 2{,}89\cdot 10^{10}\cdot\sin 0{,}325° = 1{,}64\cdot 10^{8}\,\mathrm{m} = 0{,}24\,R_\odot\,. \tag{8.91}$$

Polomery primárnej a sekundárnej zložky sú

$$R_1 = \frac{1{,}45+0{,}24}{2} = 0{,}845\,R_\odot\,, \tag{8.92}$$

$$R_2 = \frac{1{,}45-0{,}24}{2} = 0{,}605\,R_\odot\,. \tag{8.93}$$

8.4.3 AO 2013, úloha 1 – riešenie

(a) Slnko by sa nachádzalo na nebeskej sfére presne oproti miestu, kde vidíme α Centauri. Za predpokladu rovnako orientovaného súradnicového systému by Slnko malo rektascenziu $\alpha = 2^{\mathrm{h}}\,40^{\mathrm{m}}$ a deklináciu $\delta = 61°$.

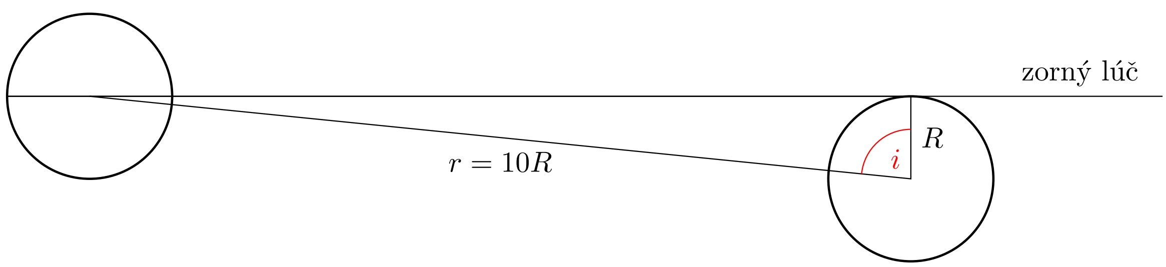
(b) Bod s uvedenými súradnicami sa nachádza v súhvezdí Kasiopeja v blízkosti súhvezdí Žirafa a Perzeus. Všetky 3 súhvezdia by boli dobrým odhadom a dali by sa uznať za správnu odpoveď.

(c) Zdanlivá magnitúda Slnka by bola

$$m = M - 5 + 5\log r = 4{,}82 - 5 + 5\log(1{,}3) = 0{,}39\,\mathrm{mag}\,. \tag{8.94}$$

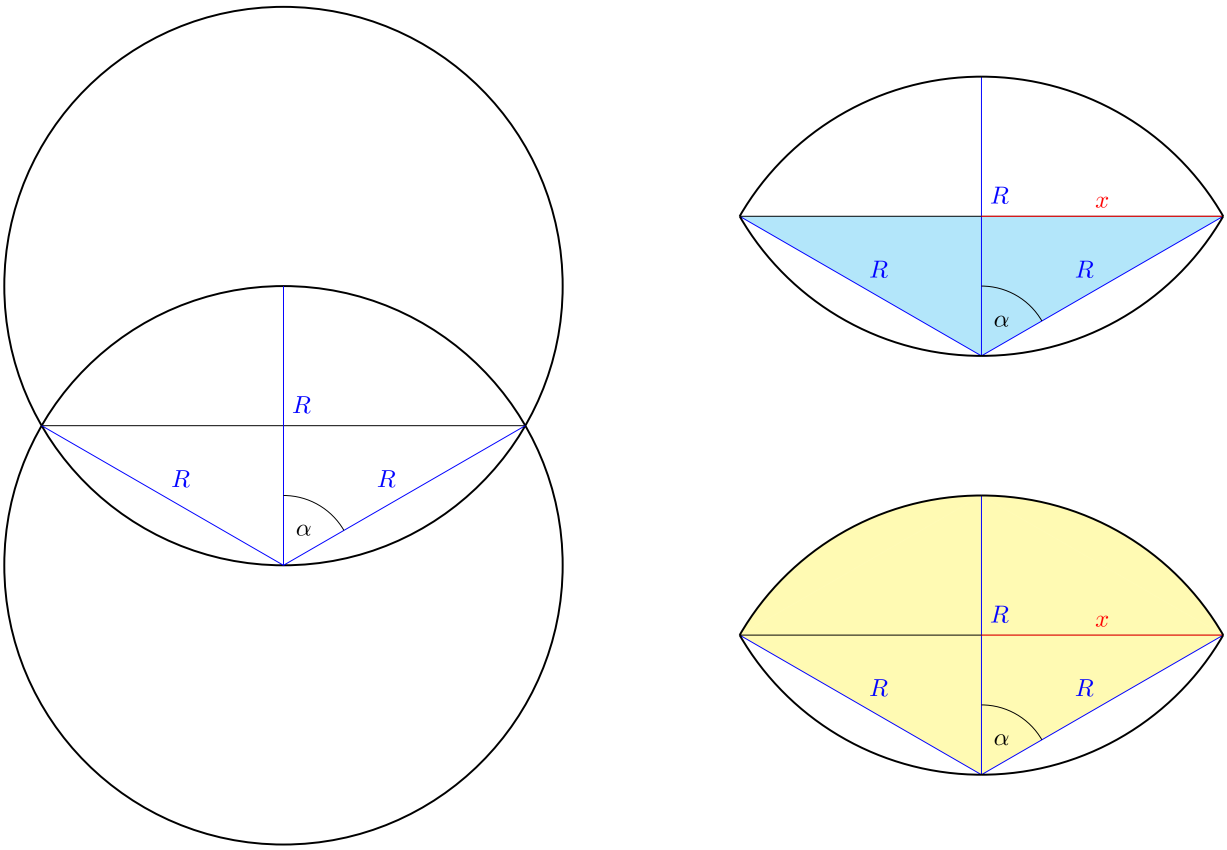
8.4.4 AO 2016, úloha 1 – riešenie

Na obrázku nižšie je nakreslený pohľad na systém zboku počas zákrytu. Vidíme, že pre sklon dráhy platí



$$\cos i = \frac{R}{r} = \frac{1}{10}\,. \tag{8.95}$$

Sklon dráhy je $i = 84{,}3°$. Na výpočet poklesu jasnosti v minime potrebujeme zistiť, aká časť disku primárnej hviezdy bude zakrytá sekundárnou zložkou. Opäť si pomôžeme obrázkom. Zakrytá časť sa skladá z dvoch rovnakých kruhových odsekov. Obsah jedného odseku vypočítame ako rozdiel obsahu žltého kruhového výseku s uhlom 2α a obsahu modrého trojuholníka.



Najskôr vypočítame uhol α

$$\cos\alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}\,. \tag{8.96}$$

Vyjde $\alpha = 60°$. Obsah žltého kruhového výseku vypočítame z trojčlenky

$$S_1 = \frac{120°}{360°}\cdot \pi R^2 = \frac{\pi}{3}R^2\,. \tag{8.97}$$

Teraz vypočítame vzdialenosť x a obsah modrého trojuholníka. Základňa trojuholníka je $a = 2x$ a výška na základňu je $v_\mathrm{a} = \frac{R}{2}$

$$x = R\sin\alpha = R\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}R\,, \tag{8.98}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}av_\mathrm{a} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot\frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\,. \tag{8.99}$$

Obsah zakrytej časti primáru je

$$S = 2(S_1 - S_2) = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2 = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2 . \tag{8.100}$$

Intenzita mimo zákrytu je

$$I_0 = I_1 + I_2 = \pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4 . \tag{8.101}$$

Intenzita počas zákrytu je

$$I_\mathrm{z} = I_{1\mathrm{z}} + I_2 = \pi R_1^2 \sigma T_1^4 - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4 . \tag{8.102}$$

Dosadíme to do Pogsonovej rovnice, skrátime π a σ a dostaneme rozdiel magnitúd

$$\Delta m = 2{,}5 \log \left(\frac{I_\mathrm{z}}{I_0} \right) = 2{,}5 \log \left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) T_1^4 + T_2^4} \right) , \tag{8.103}$$

$$\Delta m = 2{,}5 \log \left(\frac{10\,000^4 + 8000^4}{\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) 10\,000^4 + 8000^4} \right) = 0{,}35\,\mathrm{mag} . \tag{8.104}$$

8.4.5 AO 2018, úloha 1 – Slnečné neutrína – riešenie

(a) Pri každom p-p cykle vzniknú 2 neutrína. Počet neutrín, ktoré v Slnku vzniknú za 1 s je

$$\frac{\Delta N_\nu}{\Delta t} = \frac{2 L_\odot}{E_\mathrm{pp}} . \tag{8.105}$$

Tok neutrín na Zem, teda počet neutrín, ktoré dopadnú na meter štvorcový za sekundu, je

$$S_\nu = \frac{2S}{E_\mathrm{pp}} . \tag{8.106}$$

Počet molekúl vody v detektore je

$$N_{\mathrm{H_2O}} = \frac{\pi R^2 h \rho_{\mathrm{H_2O}}}{m_{\mathrm{H_2O}}} . \tag{8.107}$$

Každá z týchto molekúl môže zachytiť neutríno, pričom účinný prierez reakcie je σ. Detektor má tak celkovú efektívnu plochu

$$A = N_{\mathrm{H_2O}} \sigma . \tag{8.108}$$

Počet neutrín, ktoré detektor zachytí za rok je

$$N_\nu = S_\nu A t = \frac{2S}{E_\mathrm{pp}} \frac{\pi R^2 h \rho_{\mathrm{H_2O}}}{m_{\mathrm{H_2O}}} \sigma t = \frac{2 \cdot 1366}{4{,}28 \cdot 10^{-12}} \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 40 \cdot 1000}{3 \cdot 10^{-26}} \cdot 10^{-47} \cdot 365{,}25 \cdot 86400 = $$
$$= 3{,}36 \cdot 10^8 . \tag{8.109}$$

(b) Účinnosť detektora pre elektrónové neutrína si označíme η_e, účinnosť pre ostatné neutrína je $\eta_x = \frac{1}{7}\eta_e$. Pôvodný počet elektrónových neutrín vyprodukovaných v Slnku si označíme N_e. Počet elektrónových neutrín, ktoré dopadnú na detektor je $(1-q)N_e$, počet ostatných neutrín je $N_x = qN_e$. Ak by sa elektrónové neutrína nemenili na miónové a tauónové, detektor by zachytil $\eta_e N_e$ neutrín. V experimentoch ale detektory zachytávajú iba 40% z nich, teda $0{,}4\eta_e N_e$. Zo všetkých týchto úvah vyplýva, že pre počet zachytených neutrín detektorom platí

$$0{,}4\eta_e N_e = \eta_e(1-q)N_e + \frac{1}{7}\eta_e N_x = \eta_e(1-q)N_e + \frac{1}{7}\eta_e q N_e\,. \tag{8.110}$$

Účinnosť a počet neutrín sa nám skrátia a rovnica sa zjednoduší na

$$0{,}4 = 1 - q + \frac{1}{7}q\,, \tag{8.111}$$

$$\frac{6}{7}q = 0{,}6\,. \tag{8.112}$$

Dostávame $q = 0{,}7$.

8.4.6 AO 2020, úloha 1 – Slnko a Zem – riešenie

(a) Keďže Zem bude mať viazanú rotáciu, tak na jeden obeh okolo Slnka požadujeme aby sa Zem taktiež otočila presne o 360°. Takže jeden deň bude trvať rovnako ako siderický rok, tj. 365,256 stredných slnečných dní.

(b) Keďže poznáme iba vlnovú dĺžku na ktorej Slnko vyžaruje najintenzívnejšie, tak je potrebné, aby sme si ju previedli na teplotu povrchu (fakticky na efektívnu teplotu, ale tú môžeme aproximovať na reálnu teplotu)

$$T_\odot = \frac{b}{\lambda_\odot}\,. \tag{8.113}$$

Vyžarovaný výkon z celého povrchu Slnka je

$$L = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4\,. \tag{8.114}$$

Teplotu Slnka si vyjadríme cez vlnovú dĺžku žiarenia

$$L = 4\pi R_\odot^2 \sigma \left(\frac{b}{\lambda_\odot}\right)^4\,. \tag{8.115}$$

Pri Zemi je žiarivý tok rovný

$$F = \frac{L}{4\pi a_\oplus^2} = \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma \left(\frac{b}{\lambda_\odot}\right)^4}{4\pi a_\oplus^2} = \frac{R_\odot^2 \sigma b^4}{a_\oplus^2 \lambda_\odot^4}\,. \tag{8.116}$$

Vieme, že príkon zo Slnka na Zem a výkon s akým Zem vyžaruje sa musia rovnať

$$P_\odot = P_\oplus\,. \tag{8.117}$$

Príkon zo Slnka na Zem je rovný žiarivému toku zachytenému privrátenou pologuľou Zeme. Zem efektívne zachytáva žiarenie ako kruh s polomerom $R_\oplus$.

$$P_\odot = F\pi R_\oplus^2 = \frac{R_\odot^2 \sigma b^4}{a_\oplus^2 \lambda_\odot^4}\pi R_\oplus^2 \,. \tag{8.118}$$

Zem vyžaruje ako absolútne čierne teleso z celého povrchu pologule

$$P_\oplus = L_\oplus = 2\pi R_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4 \,, \tag{8.119}$$

$$\frac{R_\odot^2 \sigma b^4}{a_\oplus^2 \lambda_\odot^4}\pi R_\oplus^2 = 2\pi R_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4 \,, \tag{8.120}$$

$$\frac{R_\odot^2 b^4}{a_\oplus^2 \lambda_\odot^4} = 2T_\oplus^4 \,, \tag{8.121}$$

$$T_\oplus^4 = \frac{R_\odot^2 b^4}{2a_\oplus^2 \lambda_\odot^4} \,, \tag{8.122}$$

$$T_\oplus = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\frac{b}{\lambda_\odot}\sqrt{\frac{R_\odot}{a_\oplus}} \,. \tag{8.123}$$

(c) Keďže jediná energia pochádza z mikrovlnného kozmického pozadia (CMB), tak teplota sa ustáli približne na hodnote teploty CMB, to je 2,73 K.

8.4.7 AO 2020, úloha 3 – Štvrťstoročie s exoplanétami – riešenie

(a) Veľkú polos exoplanéty vypočítame z 3. Keplerovho zákona

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_{51\mathrm{Peg}}P^2}{4\pi^2}} \,, \tag{8.124}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot (4{,}23 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} = 7{,}93 \cdot 10^9\,\mathrm{m} = 0{,}053\,\mathrm{au} \,. \tag{8.125}$$

(b) Sínusový tvar krivky znamená, že planéta sa pohybuje po kruhovej dráhe. Zo známej orbitálnej periódy a polomeru dráhy vieme vypočítať obežnú rýchlosť planéty

$$v_\mathrm{p} = \frac{2\pi a}{P} = \frac{2\pi \cdot}{4{,}23 \cdot 86400} = 1{,}36 \cdot 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 136\,\mathrm{km\,s^{-1}} \,. \tag{8.126}$$

Rýchlosť hviezdy vypočítame z Dopplerovho posunu jej spektrálnych čiar

$$v_{51\mathrm{Peg}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}c = 1{,}85 \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8 = 55{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \,. \tag{8.127}$$

Využijeme, že pomer hmotností sa rovná prevrátenému pomeru rýchlostí

$$\frac{M_\mathrm{p}}{M_{51\mathrm{Peg}}} = \frac{v_{51\mathrm{Peg}}}{v_\mathrm{p}} \,. \tag{8.128}$$

Hmotnosť exoplanéty je

$$M_\mathrm{p} = \frac{v_{51\mathrm{Peg}}}{v_\mathrm{p}} M_{51\mathrm{Peg}} = \frac{55{,}5}{1{,}36 \cdot 10^5} \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 9{,}01 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}\,. \tag{8.129}$$

Ak by sklon dráhy nebol presne 90°, maximum radiálnej rýchlosti by bolo iba priemetom orbitálnej rýchlosti do roviny zorného lúča $v_\mathrm{r} = v \sin(i)$. Skutočná orbitálna rýchlosť hviezdy by bola väčšia. Orbitálna rýchlosť planéty je určená z veľkej polosi a periódy, preto by sa nezmenila. Hmotnosť exoplanéty by preto pri menšom sklone vyšla väčšia. Použitím $i = 90°$ sme teda získali dolný odhad hmotnosti exoplanéty.

(c) Príkon prijatý planétou sa musí rovnať výkonu vyžiarenému planétou. Tok žiarenia na planétu je

$$F = \frac{L_{51\mathrm{Peg}}}{4\pi a^2}\,. \tag{8.130}$$

Príkon energie na planétu je

$$P = F(1-A)R_\mathrm{p}^2 = \frac{L_{51\mathrm{Peg}}}{4\pi a^2}(1-A)\pi R_\mathrm{p}^2\,. \tag{8.131}$$

Výkon vyžiarený planétou je rovný žiarivému výkonu absolútne čierneho telesa

$$L = 4\pi R_\mathrm{p}^2 \sigma T_\mathrm{p}^4\,. \tag{8.132}$$

Z rovnosti výkonu a príkonu, $L = P$, si vyjadríme teplotu planéty

$$\frac{L_{51\mathrm{Peg}}}{4\pi a^2}(1-A) = 4\sigma T_\mathrm{p}^4 \tag{8.133}$$

$$T_\mathrm{p} = \sqrt[4]{\frac{L_{51\mathrm{Peg}}}{16\pi\sigma a^2}(1-A)} = \sqrt[4]{\frac{4{,}28 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (7{,}93 \cdot 10^9)^2}(1-0{,}2)} = 1176\,\mathrm{K}\,. \tag{8.134}$$

Tento model predpokladá, že planéta vyžaruje ako absolútne čierne teleso s rovnakou teplotou po celom povrchu. Vzhľadom na veľmi krátku veľkú polos ($\sim 0{,}05$ au) je vysoko pravdepodobné, že planéta má viazanú rotáciu, takže jej privrátená strana ku hviezde je horúca a odvrátená strana je chladná. Väčšina žiarivého výkonu planéty preto pochádza z privrátenej pologule.

(d) Opäť použijeme vzorec pre pomery hmotností a rýchlostí

$$\frac{v_0}{v_\mathrm{p}} = \frac{m}{M}\,. \tag{8.135}$$

Kruhová rýchlosť planéty je

$$v_\mathrm{p}^2 = \frac{GM}{a}\,. \tag{8.136}$$

Planéta sa pohybuje rýchlejšie keď sa nachádza bližšie ku hviezde, kvôli tomu má vyššiu rýchlosť aj hviezda. Pri výpočte preto uvažujeme planétu na vnútornom okraji obývateľnej zóny s teplotou $T_\mathrm{p} = 373\,\mathrm{K}$. Vzťah medzi teplotou planéty a luminozitou hviezdy poznáme z časti (c), pričom uvažujeme $A = 0$

$$\frac{L}{16\pi\sigma a^2} = T_\mathrm{p}^4\,. \tag{8.137}$$

V zadaní máme ešte napísaný vzťah medzi luminozitou a hmotnosťou hviezdy

$$L = \frac{M^4}{M_\odot^4} L_\odot \, . \tag{8.138}$$

Tieto štyri rovnice skombinujeme a vyjadríme hmotnosť hviezdy M

$$a^2 = \frac{G^2 M^2}{v_\mathrm{p}^4} \, , \tag{8.139}$$

$$v_\mathrm{p}^4 = \frac{M^4}{m^4} v_0^4 \, , \tag{8.140}$$

$$a^2 = \frac{G^2 M^2}{M^4 v_0^4} m^4 = \frac{G^2 m^4}{M^2 v_0^4} \, , \tag{8.141}$$

$$T_\mathrm{p}^4 = \frac{M^4 L_\odot}{16\pi\sigma M_\odot^4} \frac{M^2 v_0^4}{G^2 m^4} \, , \tag{8.142}$$

$$M^6 = \frac{16\pi\sigma G^2 M_\odot^4 m^4 T_p^4}{L_\odot v_0^4} \, , \tag{8.143}$$

$$M = \sqrt[6]{\frac{16\pi\sigma G^2}{L_\odot}} \left(\frac{M_\odot m T_\mathrm{p}}{v_0} \right)^{\frac{2}{3}} \, , \tag{8.144}$$

$$M = \sqrt[6]{\frac{16\pi \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11})^2}{3{,}826 \cdot 10^{26}}} \left(\frac{1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24} \cdot 373}{13} \right)^{\frac{2}{3}} \, , \tag{8.145}$$

$$M = 0{,}044 \, M_\odot \, . \tag{8.146}$$

Najmenej hmotné hviezdy majú hmotnosť okolo $0{,}08 \, M_\odot$. Na detekciu exoplanéty podobnej Zemi v uvedených podmienkach rozlišovacia schopnosť spektrografu ELODIE nestačí. Dnešné spektrografy už dosahujú ešte väčšiu presnosť v určení radiálnych rýchlostí, na úrovni desiatok cm.s^{-1}.

8.4.8 AO 2021, úloha 1 – Merkúr – riešenie

(a) Na úvod je dôležité si uvedomiť, že keďže je rotačná os kolmá na rovinu obehu, tak nebeský rovník je zhodný s ekliptikou, čo znamená, že Slnko sa hýbe po nebeskom rovníku. Ak sa nachádzame na rovníku Merkúra, tak máme nebeský rovník priamo nad sebou, teda kolmo nad obzorom. Najvyšší bod kam sa môže Slnko dostať je tým pádom zenit.

(b) To, že je nebeský rovník kolmý na obzor nám výrazne zjednodušuje situáciu, keďže Slnko musí prejsť presne polovicu kružnice, čo je 180°. Musíme teda zrátať uhlovú rýchlosť Slnka na oblohe. Na tento pohyb vplýva rotácia Merkúra a jeho pohyb okolo Slnka. Merkúr rotuje v rovnakom smere ako obieha, teda synodický deň trvá na ňom dlhšie ako siderický – podobné ako na Zemi. Výsledná uhlová rýchlosť bude teda

$$\omega = \omega_\mathrm{R} - \omega_\mathrm{O}\,. \tag{8.147}$$

kde ω_R je uhlová rýchlosť rotácie a ω_O uhlová rýchlosť obehu. ω_R zistíme z doby otočenia okolo vlastnej osi

$$\omega_\mathrm{R} = \frac{360°}{t} = \frac{360}{59} = 6{,}10°/\text{deň}\,, \tag{8.148}$$

a ω_O z periódy obehu

$$\omega_\mathrm{O} = \frac{360°}{P} = \frac{360}{88} = 4{,}09°/\text{deň}\,. \tag{8.149}$$

Výsledná uhlová rýchlosť

$$\omega = \omega_\mathrm{R} - \omega_\mathrm{O} = 6{,}10 - 4{,}09 = 2{,}01°/\text{deň}\,. \tag{8.150}$$

Slnko nad obzorom prejde 180°, teda tam strávi dobu rovnú

$$T = \frac{180°}{\omega} = \frac{0{,}5}{\frac{1}{t} - \frac{1}{P}} = \frac{Pt}{2(P-t)} = \frac{88 \cdot 59}{2 \cdot (88-59)} = 89{,}55\,\text{dní}\,. \tag{8.151}$$

Tento vzorec sa tiež dal získať zo vzťahu na výpočet dĺžky synodického dňa.

(c) Ako prvé potrebujeme vedieť ako ďaleko je Merkúr od Slnka. Keďže uvažujeme, že obieha po kruhovej dráhe, táto vzdialenosť je stále rovnaká, konkrétne ju vieme zistiť z 3. Keplerovho zákona platného pre veľkú polos v au a obežnú dobu v rokoch. Teda

$$a = \sqrt[3]{P^2} = \left(\frac{88}{365{,}25}\right)^{2/3} = 0{,}387\,\mathrm{au} = 5{,}8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}\,. \tag{8.152}$$

Východ Slnka sa začína v momente, kedy sa jeho horný okraj dotkne horizontu a skončí, keď sa horizontu dotkne jeho dolný okraj. Slnko nad obzor vychádza kolmo, to znamená, že počas jeho východu sa pohne presne o svoj uhlový priemer. Ak by Slnko vychádzalo voči horizontu pod iným uhlom ako 90°, muselo by počas svojho východu prejsť dlhšiu uhlovú dráhu. Uhlový priemer Slnka vypočítame pomocou trigonometrie

$$\theta_\odot = \frac{2R_\odot}{a} = \frac{2 \cdot 6{,}955 \cdot 10^8}{5{,}8 \cdot 10^{10}} = 0{,}024\,\mathrm{rad} = 1{,}374°\,. \tag{8.153}$$

Tým pádom čas potrebný na východ Slnka je

$$T_\mathrm{V} = \frac{\theta_\odot}{\omega} = \frac{1{,}374}{2{,}01} = 0{,}684\,\text{dňa} = 16\,\mathrm{h}\ 24\,\mathrm{min}\,. \tag{8.154}$$

(d) Slnko vychádza pomerne dlho, avšak v pomere k celému obehu je to málo. Preto môžeme aproximovať pohyb v aféliu na obeh po kružnici s polomerom rovným áféliovej vzdialenosti. Potrebujeme totižto zrátať novú uhlovú rýchlosť Slnka po oblohe ω_A a jeho uhlový priemer θ_A

$$\omega_\mathrm{A} = \omega_\mathrm{R} - \omega_\mathrm{O,A}\,, \tag{8.155}$$

$$\omega_\mathrm{O,A} = \frac{v_\mathrm{A}}{Q}\,. \tag{8.156}$$

v_A je rýchlosť Merkúra v aféliu, ktorú vieme zistiť zo zákona zachovania momentu hybnosti

$$m v_\mathrm{P} q = m v_\mathrm{A} Q\,, \tag{8.157}$$

$$v_\mathrm{A} = v_\mathrm{P}\frac{q}{Q}\,, \tag{8.158}$$

$$\omega_\mathrm{O,A} = \frac{v_\mathrm{P} q}{Q^2}\,. \tag{8.159}$$

kde q je perihéliová a Q aféliová vzdialenosť. Tie môžeme určiť pomocou excentricity

$$q = a(1-e)\,, \tag{8.160}$$

$$Q = a(1+e)\,. \tag{8.161}$$

Po dosadení je uhlová obežná rýchlosť

$$\omega_\mathrm{O,A} = \frac{v_\mathrm{P}}{a}\frac{1-e}{(1+e)^2} = \frac{59\,000}{5{,}8\cdot 10^{10}}\cdot\frac{0{,}8}{1{,}2^2} = 5{,}64\cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad\,s^{-1}} = 2{,}80°/\mathrm{deň}\,. \tag{8.162}$$

Veľkú poloos sme už vyrátali v minulom podzadaní a v_P, e máme zadané. Posledná vec čo vplýva na dĺžku západu Slnka je jeho uhlová veľkosť

$$\theta_\mathrm{A} = \frac{2R_\odot}{Q} = \frac{2R_\odot}{a(1+e)} = \frac{2\cdot 6{,}955\cdot 10^8}{5{,}8\cdot 10^{10}\cdot 1{,}2} = 0{,}02\,\mathrm{rad} = 1{,}145°\,. \tag{8.163}$$

Finálne, trvanie východu Slnka bude teda trvať

$$T_\mathrm{V,A} = \frac{\theta_\mathrm{A}}{\omega_\mathrm{A}} = \frac{\theta_\mathrm{A}}{\omega_\mathrm{R}-\omega_\mathrm{O,A}} = \frac{1{,}145}{6{,}1-2{,}8} = 0{,}347\,\mathrm{dní} = 8\,\mathrm{h}\;20\,\mathrm{min}\,. \tag{8.164}$$

(e) Na to aby sa zastavil pohyb Slnka sa musia vyrovnať uhlové rýchlosti

$$\omega_\mathrm{O,r} = \omega_\mathrm{R}\,. \tag{8.165}$$

kde $\omega_\mathrm{O,r}$ je obežná uhlová rýchlosť v mieste dráhy so vzdialenosťou r od Slnka. Potrebujeme teda určiť obežnú uhlovú rýchlosť vo všeobecnom mieste dráhy. Podobne ako v (d) platí

$$\omega_\mathrm{O,r} = \frac{v}{r}\,. \tag{8.166}$$

Rýchlosť v vo vzdialenosti r určíme pomocou rovnice vis-viva

$$v^2 = GM_\odot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\,. \tag{8.167}$$

Z čoho dostávame rovnicu pre vzdialenosť r

$$\frac{\sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}}{r} = \omega_\mathrm{R} = \frac{2\pi}{t}\,. \tag{8.168}$$

Táto rovnica je kubická, preto je ju najjednoduchšie riešiť numericky iteračnou metódou. Ako prvé si vyjadríme r pomocou r. Potom za r na pravej strane dosadíme náš úvod odhad r_0 a dostaneme nasledujúce priblíženie r_1. Takto pokračujeme až kým nie je presnosť dostačujúca. Vyjadrenie pre r je nasledujúce

$$r = \frac{t}{2\pi}\sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}\,. \tag{8.169}$$

Ako r_0 zoberieme veľkú polos $a = 5{,}8\cdot 10^{10}$ m. Po asi 30-tich iteráciách dôjdeme ku výsledku

$$r = 4{,}7\cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 0{,}314\,\mathrm{au}\,. \tag{8.170}$$

Vzdialenosť r je možné vypočítať aj analyticky, je to ale veľmi náročné.

8.4.9 AO 2021, úloha 2 – Rádioteleskop Arecibo – riešenie

(a) Najlepšiu rozlišovaciu schopnosť dosiahneme pre minimálnu vlnovú dĺžku, teda pre maximálnu frekvenciu

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}}, \tag{8.171}$$

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda_{\min}}{D} = 1{,}22\frac{c}{Df_{\max}} = 1{,}22 \cdot \frac{2{,}9979 \cdot 10^8}{305 \cdot 10 \cdot 10^9} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} = 25''. \tag{8.172}$$

(b) Situácia je znázornená na obrázku. Oneskorenie signálu odrazeného od okrajových častí Merkúra bolo spôsobené tým, že signál musel prejsť dlhšiu dráhu. Oproti signálu odrazenému od stredu disku prešiel navyše dráhu $2R_\mathrm{M}$, preto platí

$$2R_\mathrm{M} = tc. \tag{8.173}$$

Frekvenčný posun je spôsobený odrazom od okrajových častí Merkúra, ktoré sa pohybujú rýchlosťou v_rot smerom od resp. ku pozorovateľovi na Zemi. Strednú frekvenciu si označíme f_0, maximálnu a minimálnu frekvenciu $f_1 > f_0$ a $f_2 < f_1$. Pre signál odrazený od okrajových častí Merkúra platia vzťahy

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0}}{\frac{1}{f_0}} = \frac{f_0 - f}{f_0} = \frac{f_0}{f} - 1, \tag{8.174}$$

$$\left(\frac{f_0}{f_1} - 1\right) c = -v_\mathrm{rot}, \tag{8.175}$$

$$\left(\frac{f_0}{f_2} - 1\right) c = v_\mathrm{rot}. \tag{8.176}$$

Tieto dve rovnice odčítame a vyjadríme rotačnú rýchlosť Merkúra

$$2v_\mathrm{rot} = \left(\frac{f_0}{f_2} - 1 - \frac{f_0}{f_1} + 1\right) c, \tag{8.177}$$

$$v_\mathrm{rot} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 f_2}\frac{f_0 c}{2} \approx \frac{\Delta f}{2f_0}c. \tag{8.178}$$

V menovateli sme využili, že platí $f_1 \approx f_2 \approx f_0$. V čitateli toto priblíženie nemôžeme použiť, lebo by sme dostali nulu. Rotačná perióda Merkúra je

$$P_\mathrm{rot} = \frac{2\pi R_\mathrm{M}}{v_\mathrm{rot}} = \frac{2\pi tc}{2}\frac{2f_0}{\Delta f c} = \frac{2\pi t f_0}{\Delta f} = \frac{2\pi \cdot 16{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 430 \cdot 10^6}{2 \cdot 4{,}3} = 5{,}12 \cdot 10^6\,\mathrm{s} = 59\,\text{dní}. \tag{8.179}$$

(c) Napíšeme si 3. Keplerov zákon na začiatku a po uplynutí 1 roku. Zmenu periódy označíme ΔP a zmenu veľkej polosi Δa

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}, \tag{8.180}$$

$$(P - \Delta P)^2 = \frac{4\pi^2 (a - \Delta a)^3}{G(M_1 + M_2)} \,. \tag{8.181}$$

Zmena periódy je oveľa menšia ako samotná perióda, môžeme preto očakávať, že aj zmena veľkej polosi bude malá voči jej pôvodnej hodnote. Rovnice navzájom podelíme a využijeme aproximácie uvedené v zadaní

$$\left(\frac{P - \Delta P}{P}\right)^2 = \left(\frac{a - \Delta a}{a}\right)^3 \,, \tag{8.182}$$

$$\left(1 - \frac{\Delta P}{P}\right)^2 = \left(1 - \frac{\Delta a}{a}\right)^3 \,, \tag{8.183}$$

$$1 - 2\frac{\Delta P}{P} \approx 1 - 3\frac{\Delta a}{a} \,. \tag{8.184}$$

Pôvodná veľká polos bola

$$a = \frac{1{,}1 + 4{,}8}{2} = 2{,}95\, R_\odot \,. \tag{8.185}$$

Veľká polos sa skráti o

$$\Delta a = \frac{2}{3}\frac{a}{P}\Delta P = \frac{2}{3}\frac{2{,}95 \cdot 6{,}955 \cdot 10^8}{7{,}75 \cdot 3600} \cdot 76{,}5 \cdot 10^{-6} = 3{,}8\,\mathrm{m} \,. \tag{8.186}$$

Ku rovnakému výsledku by sme sa dostali, ak by sme namiesto aproximácie využili derivácie

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}P} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a^3}\frac{\mathrm{d}a^3}{\mathrm{d}P} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}a^3}{\mathrm{d}a}}\frac{\mathrm{d}a^3}{\mathrm{d}P} = \frac{1}{3a^2} \cdot 2P\frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} \,, \tag{8.187}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}P} = \frac{2}{3}\frac{a}{P} \,, \tag{8.188}$$

$$\Delta a = \frac{2}{3}\frac{a}{P}\Delta P \,. \tag{8.189}$$

(d) Celkový vlastný pohyb hviezdokopy je (pohyb v rektascenzii je potrebné korigovať na deklináciu hviezdokopy)

$$\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos\delta)^2 + \mu_\delta^2} \,. \tag{8.190}$$

Za 22 000 rokov sa hviezdokopa na oblohe pohne o uhol

$$\beta = \mu t = \sqrt{(3{,}18 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(36°27'41''))^2 + (2{,}56 \cdot 10^{-3})^2} \cdot 22\,000 = 79{,}6'' \ll 33' \,. \tag{8.191}$$

Hviezdokopa sa pohne o oveľa menší uhol, než je jej uhlový rozmer, signál ju preto určite ešte zasiahne.

(e) Signál zo Zeme dopadá vo vzdialenosti $r = 22\,000\,\mathrm{ly}$ na plochu

$$S = \Omega r^2 \,. \tag{8.192}$$

Spektrálna intenzita signálu je

$$B = \frac{P}{S\Delta f} = \frac{P}{\Omega r^2 \Delta f} \,. \tag{8.193}$$

$$B = \frac{450 \cdot 10^3}{2{,}4 \cdot 10^{-9} \cdot (22\,000 \cdot 9{,}461 \cdot 10^{15})^2 \cdot 10} = 4{,}33 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}} = 43\,\mathrm{mJy} > 1\,\mathrm{mJy}\,. \tag{8.194}$$

Signál by boli schopní zachytiť.

8.4.10 AO 2022, úloha 1 – Zachytenie novy – riešenie

(a) Stačí nám napísať si základný vzťah pre rýchlosť, čas a vzdialenosť pre svetlo a pre neutrína

$$r = ct\,, \tag{8.195}$$

$$r = v_\nu(t + \Delta t) = v_\nu t + v_\nu \Delta t\,, \tag{8.196}$$

$$r = v_\nu \frac{r}{c} + v_\nu \Delta t\,, \tag{8.197}$$

$$r\left(1 - \frac{v_\nu}{c}\right) = v_\nu \Delta t\,, \tag{8.198}$$

$$r = \frac{c v_\nu}{c - v_\nu}\Delta t\,. \tag{8.199}$$

Vypočítame rozdiel rýchlostí svetla a neutrín

$$c - v_\nu = (1 - 0{,}999\,999\,999)c = 1 \cdot 10^{-9} c\,. \tag{8.200}$$

Dosadíme do menovateľa zlomku a vykrátime c. Vzdialenosť novy je

$$r = \frac{c v_\nu}{1 \cdot 10^{-9} c}\Delta t = \frac{v_\nu}{1 \cdot 10^{-9}}\Delta t\,. \tag{8.201}$$

$$r = \frac{2{,}9979 \cdot 10^8}{10^{-9}} \cdot 2{,}5 \cdot 60 = 4{,}5 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m} = 1457\,\mathrm{pc}\,. \tag{8.202}$$

Za v_ν sme dosadili hodnotu rýchlosti svetla, pretože je takmer rovnaká a dosadenie presnej hodnoty v_ν by nám výsledok v rámci platných číslic vôbec nezmenilo.

(b) Absolútna bolometrická magnitúda novy je

$$M = m + 5 - 5 \log r = 0 + 5 - 5 \log(1457) = -10{,}82\,\mathrm{mag}\,. \tag{8.203}$$

(c) Poznáme plošnú hustota neutrín pri Zemi a vzdialenosť novy. Predstavíme si, že všetky neutrína sú na sfére s polomerom rovným vzdialenosť k nove a celkový počet neutrín spočítame jednoducho ako

$$N_\nu = 4\pi r^2 \sigma_\nu = 4\pi \cdot (4{,}5 \cdot 10^{19})^2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{15} = 1{,}15 \cdot 10^{56}\,. \tag{8.204}$$

(d) Pri každom p-p cykle sa vyprodukujú 2 neutrína. Na jedno neutríno pripadá energia

$$E_\nu = \frac{E_{\mathrm{pp}}}{2}\,. \tag{8.205}$$

Celkovú energiu výbuchu novy získame prenásobením počtom neutrín

$$E^* = N_\nu E_\nu = 1{,}15 \cdot 10^{56} \cdot \frac{26{,}142}{2} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} = 2{,}4 \cdot 10^{44}\,\mathrm{J}\,. \tag{8.206}$$

(e) Z Pogsonovej rovnice pre absolútne bolometrické magnitúdy vieme vypočítať žiarivý výkon novy

$$M_\odot - M = 2{,}5 \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) , \tag{8.207}$$

$$L = 2{,}512^{M_\odot - M} L_\odot . \tag{8.208}$$

Vieme, že sa dobu τ nova vyžiarila energiu E^*, z toho dostaneme

$$\tau = \frac{E^*}{L} = \frac{E^*}{2{,}512^{M_\odot - M} L_\odot} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{44}}{2{,}512^{4{,}72+10{,}82} \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}} = 3{,}81 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s} = 12\,000\,\mathrm{rokov} . \tag{8.209}$$

(f) Využijeme Wienovu aproximáciu zo zadania. Je vhodnejšie ju použiť pre filtre U a B s kratšími vlnovými dĺžkami. Podelíme Wienov zákon pre tieto dva filtre a dostaneme

$$\frac{U}{B} = \frac{f_\mathrm{U}^3 \exp\left(\frac{-hf_\mathrm{U}}{k_\mathrm{B}T}\right)}{f_\mathrm{B}^3 \exp\left(\frac{-hf_\mathrm{B}}{k_\mathrm{B}T}\right)} . \tag{8.210}$$

Namiesto frekvencií chceme použiť vlnové dĺžky

$$f = \frac{c}{\lambda} , \tag{8.211}$$

$$\frac{U}{B} = \frac{U}{V}\frac{V}{B} = \frac{\lambda_B^3 \exp\left(\frac{-hc}{k_\mathrm{B}T\lambda_\mathrm{U}}\right)}{\lambda_\mathrm{U}^3 \exp\left(\frac{-hc}{k_\mathrm{B}T\lambda_\mathrm{B}}\right)} = \frac{\lambda_\mathrm{B}^3}{\lambda_\mathrm{U}^3} \exp\left[\frac{hc}{k_\mathrm{B}T}\left(\frac{1}{\lambda_\mathrm{B}} - \frac{1}{\lambda_\mathrm{U}}\right)\right] . \tag{8.212}$$

Rovnicu zlogaritmujeme

$$\ln\left(\frac{U}{B}\frac{\lambda_\mathrm{U}^3}{\lambda_\mathrm{B}^3}\right) = \frac{hc}{k_\mathrm{B}T}\left(\frac{1}{\lambda_\mathrm{B}} - \frac{1}{\lambda_\mathrm{U}}\right) . \tag{8.213}$$

Vyjadríme teplotu

$$T = \frac{hc}{k_\mathrm{B}}\left(\frac{1}{\lambda_\mathrm{B}} - \frac{1}{\lambda_\mathrm{U}}\right) \frac{1}{\ln\left(\frac{U}{v}\frac{V}{B}\frac{\lambda_\mathrm{U}^3}{\lambda_\mathrm{B}^3}\right)} , \tag{8.214}$$

$$T = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^8}{1{,}381 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{442} - \frac{1}{364}\right) \frac{10^9}{\ln\left(1{,}79 \cdot 1{,}8231 \cdot \frac{364^3}{442^3}\right)} = 11\,600\,\mathrm{K} . \tag{8.215}$$

Rozdiel oproti typickým teplotám je spôsobený tým, že nova nežiari ako absolútne čierne teleso, preto na výpočet jej teploty nie je vhodné použiť Planckov zákon ani jeho aproximácie.

(g) Najskôr vypočítame strednú pozorovanú vlnovú dĺžku čiary Hα, z tej potom vypočítame rýchlosť vzďaľovania sa novy

$$\lambda = \frac{6654{,}67942 + 6470{,}92102}{2} = 6562{,}800\,22\,\mathrm{rokov} , \tag{8.216}$$

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} c . \tag{8.217}$$

Hubblovu konštantu určíme ako podiel rýchlosti a vzdialenosti novy

$$H_0 = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}\frac{c}{r} = \frac{0{,}00022}{6562{,}8} \cdot \frac{2{,}9979e5}{1457 \cdot 10^{-6}} = 6{,}9\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}\,. \tag{8.218}$$

To je pochopiteľne úplne mimo známej hodnoty Hubblovej konštanty, pretože meriame na malých vzdialenostiach kde sa prejavujú relatívne vzájomné pohyby objektov a nie rozpínanie vesmíru.

(h) Z krajných hodnôt nameranej vlnovej dĺžky čiary Hα vieme vypočítať rýchlosť časti obálky, ktorá sa od Zeme najrýchlejšie vzďaluje

$$v_{\leftarrow} = \frac{\lambda_{\leftarrow} - \lambda_0}{\lambda_0}c = \frac{6654{,}67942 - 6562{,}8}{6562{,}8} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^5 = 4200\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{8.219}$$

Aj časti obálky, ktorá sa ku Zemi najrýchlejšie približuje

$$v_{\leftarrow} = \frac{\lambda_{\leftarrow} - \lambda_0}{\lambda_0}c = \frac{6470{,}92102 - 6562{,}8}{6562{,}8} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^5 = -4200\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{8.220}$$

Ako vidíme, obidve rýchlosti sú rovnaké, obálka sa pravdepodobne rozpína symetricky.

8.4.11 AO 2022, úloha 3 – Vesmírny slnečník – riešenie

(a) Hľadáme bod, v ktorom sa vyrovnajú gravitačné sily Zeme a Slnka. Nech x_0 je vzdialenosť od Zeme. Gravitačný zákon hovorí

$$\frac{GM_\odot}{(a_\oplus - x_0)^2} = \frac{GM_\oplus}{x_0^2}\,. \tag{8.221}$$

Z toho vyjadríme x_0 a dostaneme

$$\sqrt{M_\odot}x_0 = \sqrt{M_\oplus}a_\oplus - \sqrt{M_\oplus}x_0\,. \tag{8.222}$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{M_\oplus}}{\sqrt{M_\odot} - \sqrt{M_\oplus}}a_\oplus = \frac{\sqrt{5{,}9736 \cdot 10^{24}}}{\sqrt{1{,}9891 \cdot 10^{30}} - \sqrt{5{,}9736 \cdot 10^{24}}} \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} = 2{,}59 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 0{,}17x\,. \tag{8.223}$$

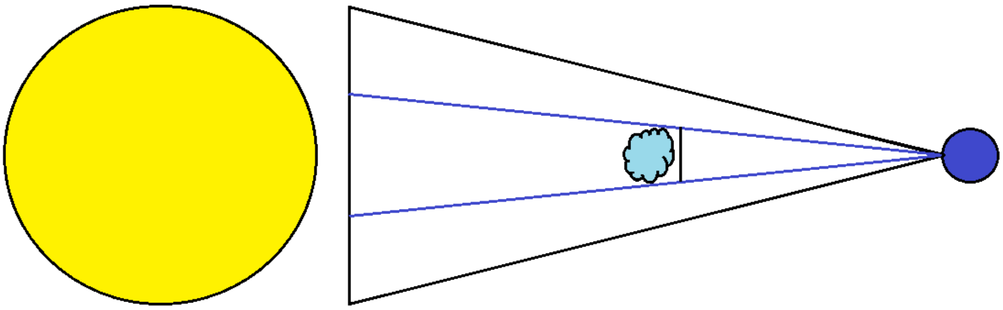
V bode L1, vo vzdialenosti x od Zeme, gravitačnej sile Zeme pomáha aj odstredivá sila generovaná obehom vesmírnej lode okolo Slnka. Balans všetkých síl v L1 (x) je preto dosiahnutý vo väčšej vzdialenosti od Zeme než je x_0, stačí nám slabšia príťažlivá sila Zeme než je tá slnečná.

(b) Problém je, že sa jedná o vratkú (nestabilnú) rovnováhu. Výsledná sila po akomkoľvek miniatúrnom odchýlení z rovnovážnej polohy smeruje vždy od rovnovážnej polohy. Keďže gravitácia je príťažlivá sila, akákoľvek malá výchylka smerom k Zemi spôsobí zvýšenie jej príťažlivosti a zníženie príťažlivosti Slnka. V prípade opačnej výchylky zas preváži Slnko. To spôsobí porušenie rovnováhy pri akejkoľvek konečnej výchylke. Keďže vesmírna loď nie je hmotný bod, ktorý vieme znavigovať nula metrov od presného miesta rovnováhy, ponechaná napospas osudu v bode L1 nemôže zotrvať. Tento argument doposiaľ nespomenul odstredivú silu – funguje to aj s ňou. Na plný počet za túto podúlohu stačilo diskutovať gravitačné sily. Ďalší dôležitý fakt je prítomnosť ďalších telies v Slnečnej sústave (a v princípe kdekoľvek vo vesmíre) – ich slabý, no nenulový vplyv by vychýlil aj hmotný bod presne v L1, do výpočtu ktorého vplyv iných telies zahrnutý nie je. Táto poznámka taktiež nebola nutná na získanie plného počtu bodov.

(c) Slnečná konštanta je

$$F_S = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} = \frac{3{,}826 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} = 1360\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,. \tag{8.224}$$

(d) Vychádzame z nákresu. Slnečník v L1 (v strede) a Slnko (vľavo) sa premietajú na oblohu Zeme (vpravo). Pomer slnečného žiarenia zachyteného vesmírnym slnečníkom vyrátame ako pomer ich uhlových plôch viditeľných zo Zeme, rovnaký princíp ako pri zatmení alebo zákryte iných vesmírnych objektov. Podľa zadania chceme aby bol tento pomer 0,01



$$\Omega_\odot = \frac{\pi R_\odot^2}{a_\oplus}\,, \tag{8.225}$$

$$\Omega_\mathrm{S} = \frac{S}{x}\,, \tag{8.226}$$

$$\frac{\Omega_\mathrm{S}}{\Omega_\odot} = 0{,}01\,. \tag{8.227}$$

Odtiaľ získame tieniaci povrch slnečníka

$$S = 0{,}01\pi R_\odot^2 \frac{x}{a_\oplus} = 0{,}01 \cdot \pi \cdot (6{,}955 \cdot 10^8)^2 \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^9}{1{,}496 \cdot 10^{11}} = 1{,}52 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^2\,. \tag{8.228}$$

(e) Vychádzame z rovnice v zadaní, hybnosť fotónu je

$$p_\mathrm{f} = \frac{E}{c}\,. \tag{8.229}$$

Počet fotónov, ktoré dopadnú na slnečník za 1 sekundu je

$$N_f = \frac{FS}{E}\,. \tag{8.230}$$

V čitateli je energia, ktorú slnečník zachytí za 1 sekundu a v menovateli je energia jedného fotónu. Tok energie na slnečník je

$$F = \frac{L_\odot}{4\pi(a_\oplus - x)^2}\,. \tag{8.231}$$

Slnečník absorbuje fotóny, čím sa naň prenesie ich hybnosť. Za jednotku času sa na slnečník prenesie hybnosť

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = N_\mathrm{f} p_\mathrm{f} = \frac{FS}{E}\frac{E}{c} = \frac{FS}{c} = \frac{L_\odot S}{4\pi(a_\oplus - x)^2 c}\,. \tag{8.232}$$

Sila je zmena hybnosti za čas, takže výraz vyššie je zároveň výrazom pre tlakovú silu.Jej číselná hodnota je

$$F_\mathrm{p} = \frac{3{,}826 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}52 \cdot 10^{14}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11} - 1{,}5 \cdot 10^{9})^2 \cdot 2{,}9979 \cdot 10^{8}} = 7 \cdot 10^{8}\,\mathrm{N}\,. \tag{8.233}$$

(f) Zem je v energetickej rovnováhe, energiu, ktorú prijme musí aj vyžiariť, preto platí

$$(1 - A)F_\mathrm{S}\pi R_\oplus^2 = 4\pi R_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4\,. \tag{8.234}$$

Teplota Zeme je

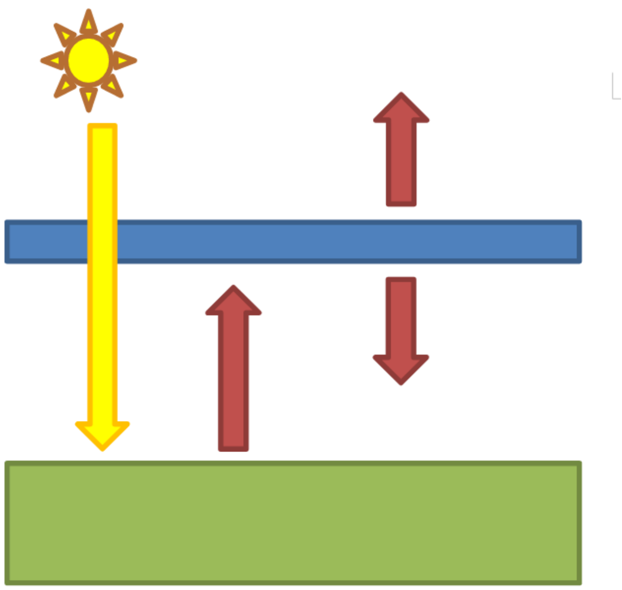
$$T_\oplus = \sqrt[4]{\frac{(1-A)F_\mathrm{S}}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{(1-0{,}3)\cdot 1360}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} = 254{,}5\,\mathrm{K}\,. \tag{8.235}$$

V prípade zníženia slnečnej konštanty o 1 % by sa teplota Zeme zmenila na

$$T'_\oplus = \sqrt[4]{\frac{0{,}99(1-A)F_\mathrm{S}}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}99 \cdot (1-0{,}3)\cdot 1360}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} = 253{,}9\,\mathrm{K}\,. \tag{8.236}$$

To že sú tieto teploty také nízke by nemalo prekvapiť, keďže sme neuvažovali akýkoľvek skleníkový efekt, išlo iba o preskúmanie vplyvu slnečnej konštanty.
BONUS

(g) Základný model je na obrázku. Žltá šípka označuje slnečné žiarenie, červená šípka tepelné infračervené žiarenie Zeme a atmosféry (tenká modrá vrstva medzi Zemou a Slnkom). Budeme rozmýšľať o tokoch energie na 1 m^2 zemského povrchu, takže efektívna slnečná konštanta je $\frac{F_\mathrm{S}}{4}$. Atmosféra má dva „povrchy“: dolný a horný, a pre oba platí Stefanov-Boltzmannov zákon. V rovnovážnom stave pre (i) Zem, a (ii) atmosféru platí, že prijatá energia sa musí rovnať vyžiarenej energii



Energetická rovnováha pre Zem

$$\frac{(1-A)F_\mathrm{S}}{4} + \sigma T_\mathrm{A}^4 = \sigma T_\oplus^4 \,. \tag{8.237}$$

Energetická rovnováha pre atmosféru

$$\sigma T_\oplus^4 = 2\sigma T_\mathrm{A}^4 \,. \tag{8.238}$$

Riešením tohto systému pre teplotu Zeme dostaneme ($T_{\oplus 0}$ predstavuje teplotu Zeme bez skleníkových plynov, nájdenú v časti (f))

$$T_\oplus = \sqrt[4]{\frac{(1-A)F_\mathrm{S}}{2\sigma}} = \sqrt[4]{2}T_{\oplus 0} = \sqrt[4]{2}\cdot 254{,}5 = 303\,\mathrm{K}\,. \tag{8.239}$$

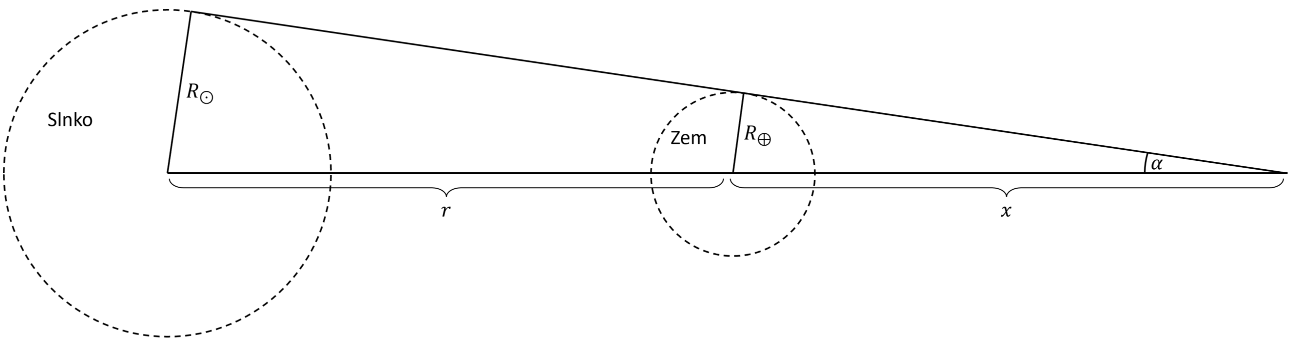
Rovnicu pre malé zmeny môžme získať použitím aproximácie $(1+x)^n \approx 1+nx$, ktorá platí pre $x \ll 1$, prípadne derivovaním

$$\frac{\mathrm{d}T_\oplus}{\mathrm{d}F_\mathrm{S}} = \frac{1}{4}\left(\frac{(1-A)F_\mathrm{S}}{2\sigma}\right)^{-\frac{3}{4}}\frac{1-A}{2\sigma} = \frac{1}{4F_\mathrm{S}}\frac{1-A}{2\sigma}\,, \tag{8.240}$$

$$\delta T_\oplus = \frac{1}{4F_\mathrm{S}}\frac{1-A}{2\sigma}\delta F_\mathrm{S}\,. \tag{8.241}$$

8.4.12 AO 2023, úloha 2 – JWST – riešenie

(a) Na základe schémy môžeme z podobnosti trojuholníkov písať



$$\frac{R_\odot}{r+x} = \frac{R_\oplus}{x}\,. \tag{8.242}$$

kde x je hľadaná vzdialenosť do ktorej siaha úplný tieň Zeme. r je aktuálna vzdialenosť Zeme od Slnka, čo je $r_\mathrm{P} = a_\oplus(1-e)$ v perihéliu a $r_\mathrm{A} = a_\oplus(1+e)$ v aféliu. Z rovnice vyjadríme a dopočítame x_P (v perihéliu) a x_A (v aféliu)

$$xR_\odot = rR_\oplus + xR_\oplus\,, \tag{8.243}$$

$$x(R_\odot - R_\oplus) = rR_\oplus\,, \tag{8.244}$$

$$\begin{aligned}x_\mathrm{P} &= \frac{R_\oplus r_\mathrm{P}}{R_\odot - R_\oplus} = \frac{R_\oplus a(1-e)}{R_\odot - R_\oplus}\\ &= \frac{6{,}378\cdot10^6\cdot1{,}496\cdot10^{11}\cdot(1-0{,}0167)}{6{,}955\cdot10^8-6{,}378\cdot10^6} = 1{,}36\cdot10^9\,\mathrm{m}\,,\end{aligned}\tag{8.245}$$

$$\begin{aligned}x_\mathrm{A} &= \frac{R_\oplus r_\mathrm{A}}{R_\odot - R_\oplus} = \frac{R_\oplus a(1+e)}{R_\odot - R_\oplus}\\ &= \frac{6{,}378\cdot10^6\cdot1{,}496\cdot10^{11}\cdot(1+0{,}0167)}{6{,}955\cdot10^8-6{,}378\cdot10^6} = 1{,}41\cdot10^9\,\mathrm{m}\,.\end{aligned}\tag{8.246}$$

Vidíme, že tieň nesiaha až do bodu L2 (aj keď tesne). To znamená, že JWST nemôže pozorovať úplné zatmenie Slnka.

(b) Keďže $r \gg R_\odot, R_\oplus$, tak môžeme uvažovať, že polomery zaznačené na ďalšej schéme šikmo sú približne kolmé na priamku stred Slnka - stred Zeme - L2, tak ako je to nakreslené na obrázku nižšie. Z podobnosti zeleného a modrého trojuholníka môžeme písať

$$\frac{R_\odot + R_\oplus}{r} = \frac{y - R_\oplus}{d}\,,\tag{8.247}$$

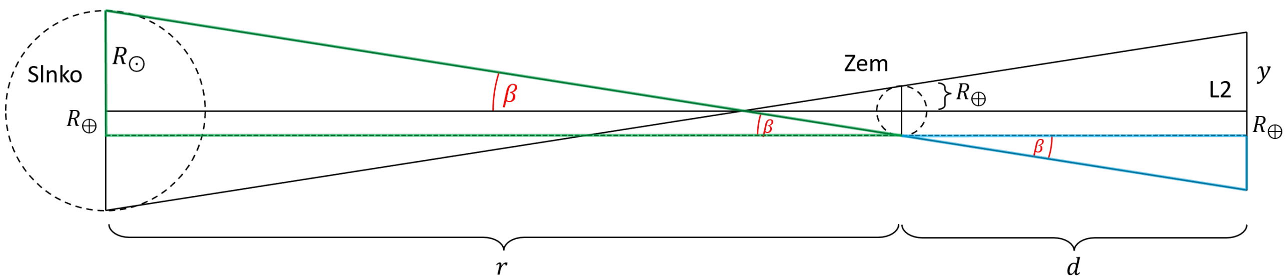
kde y je hľadaná kolmá vzdialenosť od priamky Slnko - Zem - L2 do ktorej siaha polotieň Zeme. Obdobne ako v časti a), r je aktuálna vzdialenosť Zeme od Slnka, čo je $r_\mathrm{P} = a(1-e)$ v perihéliu a $r_\mathrm{A} = a(1+e)$ v aféliu. d je aktuálna vzdialenosť bodu L2 od Zeme, čo je d_P pre Zem v perihéliu a d_A pre Zem v aféliu (hodnoty poznáme zo zadania). Vyjadríme si a dopočítame y_P (v perihéliu) a y_A (v aféliu):

$$y_\mathrm{P} = \frac{d_\mathrm{P}}{r_\mathrm{P}}(R_\odot + R_\oplus) + R_\oplus = \frac{d_\mathrm{P}}{a}\frac{R_\odot + R_\oplus}{1-e} + R_\oplus\,,\tag{8.248}$$

$$y_\mathrm{P} = \frac{1{,}48\cdot10^9}{1{,}496\cdot10^{11}}\frac{6{,}955\cdot10^8+6{,}378\cdot10^6}{1-0{,}0167} + 6{,}378\cdot10^6 = 13{,}3\cdot10^6\,\mathrm{m}\,,\tag{8.249}$$

$$y_\mathrm{A} = \frac{d_\mathrm{A}}{r_\mathrm{A}}(R_\odot + R_\oplus) + R_\oplus = \frac{d_\mathrm{A}}{a}\frac{R_\odot + R_\oplus}{1+e} + R_\oplus \doteq 13{,}3\cdot10^6\,\mathrm{m}\,.\tag{8.250}$$

Vidíme, že polotieň siaha do (približne) rovnakej vzdialenosti pre Zem v perihéliu aj aféliu.



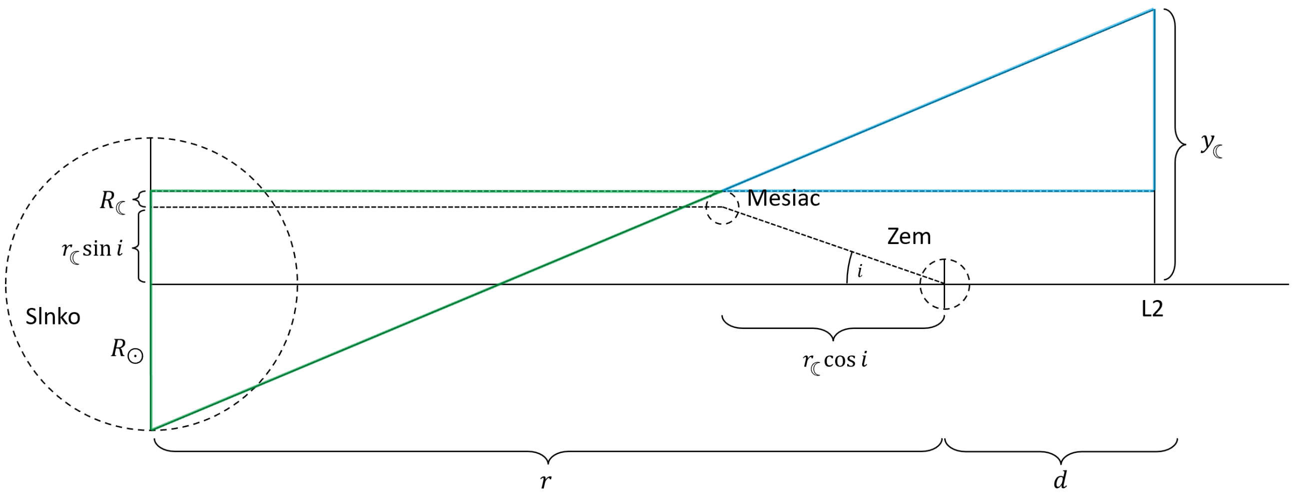
(c) Minimálna vzdialenosť v ktorej musí JWST obiehať, aby sa vždy vyhol polotieňu Mesiaca je rovná maximálnej vzdialenosti do ktorej sa niekedy polotieň dostane. Na to aby polotieň Mesiaca siahal čo najďalej od priamky Slnko - Zem - L2, chceme aby bol Mesiac čo najbližšie ku Slnku a čo najďalej od roviny ekliptiky. To znamená, že počítame prípad, kedy je Zem v perihéliu, $r_P = a(1-e)$, a Mesiac v apogeu vo vzdialenosti $r_{☾_A} = a_☾(1+e_☾)$ smerom ku Slnku pod uhlom i. Opäť predpokladáme kolmosť polomerov na priamku Zem - Slnko - L2, tak ako to je znázornené na schéme nižšie. Z podobnosti vyznačených trojuholníkov dostávame

$$\frac{R_☾ + r_☾ \sin i + R_\odot}{r - r_☾ \cos i} = \frac{y_☾ - R_☾ - r_☾ \sin i}{r_☾ \cos i + d}\,, \tag{8.251}$$

kde $y_☾$ je hľadaná kolmá vzdialenosť od priamky Slnko - Zem - L2 do ktorej siaha polotieň Mesiaca. Po dosadení vzdialenosti Zeme od Slnka $r = r_\mathrm{P}$, Mesiaca od Zeme $r_☾ = r_{☾_\mathrm{A}}$ a L2 od Zeme $d = d_\mathrm{P}$ (diskutované vyššie) do rovnice a vyjadrení $y_☾$ dostávame

$$y_☾ = \frac{R_☾ + a_☾(1+e_☾)\sin i + R_\odot}{a(1-e) - a_☾(1+e_☾)\cos i}\left(a_☾(1+e_☾)\cos i + d_\mathrm{P}\right) + R_☾ + a_☾(1+e_☾)\sin i = 46{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\,. \tag{8.252}$$

Poznámka: JWST vskutku obieha ďalej od bodu L2, najbližšie je $250 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.



(d) Zdroj je vzdialený, čo znamená, že vzdialenosť Zeme od L2 nehrá rolu, budeme uvažovať, že sa nachádzajú v približne rovnakej vzdialenosti od zdroja. Keďže zdroj vyžaruje monochromaticky, tak pomer energetických tokov je rovný pomeru fotónov. Ak by sa oko nachádzalo vo vesmíre, tak

$$\frac{N}{N_\mathrm{oko,vesmír}} = \frac{S}{S_\mathrm{oko}}\frac{\eta}{\eta_\mathrm{oko}}\,. \tag{8.253}$$

kde je N počet fotónov, ktoré zachytí JWST, $N_\mathrm{oko,vesmír}$ počet fotónov, ktoré zachytí oko vo vesmíre, S zberná plocha JWST a S_oko zberná plocha oka. Dosadením $S = \pi(D/2)^2$ a $S_\mathrm{oko} = \pi(D_\mathrm{oko}/2)^2$ dostávame

$$\frac{N}{N_\mathrm{oko,vesmír}} = \frac{D^2}{D^2_\mathrm{oko}}\frac{\eta}{\eta_\mathrm{oko}}\,. \tag{8.254}$$

Avšak oko sa nachádza na Zemi, kde dochádza ku extinkcii svetla v atmosfére. Máme zadané, že extinkcia je $\Delta m = 0{,}3\,\mathrm{mag}$, čo znamená že vieme pomocou Pogsonovej rovnice vyrátať pomer počtu fotónov dopadajúcich na oko vo vesmíre a na Zemi.

$$\Delta m = -2{,}5 \log\left(\frac{N_\mathrm{oko,zem}}{N_\mathrm{oko,vesmír}}\right)\,. \tag{8.255}$$

Z čoho máme

$$N_\mathrm{oko,vesmír} = N_\mathrm{oko,zem} \cdot 10^{0{,}4\cdot\Delta m}\,. \tag{8.256}$$

Dosadením za $N_{\text{oko,vesmír}}$ a úpravou dostávame

$$\frac{N}{N_{\text{oko,zem}}} = \frac{D^2}{D_{\text{oko}}^2}\frac{\eta}{\eta_{\text{oko}}} \cdot 10^{0{,}4\cdot\Delta m} = \frac{6{,}5^2}{0{,}004^2}\frac{0{,}7}{0{,}1} \cdot 10^{0{,}4\cdot 0{,}3} = 24 \cdot 10^6\,. \tag{8.257}$$

(e) Vzdialenosť, dvoch bodov, ktoré vie JWST rozlíšiť označme l. Najmenšie je ak bude JWST najbližšie k Mesiaci, čo nastáva pre Mesiac v apogeu (vzdialenosť $r_{☾_\text{A}}$ od Zeme) a Zem v perihéliu (kedy je L2 najbližšie ku Zemi, vo vzdialenosti d_P). Ak je θ rozlišovacia schopnosť JWST, potom

$$\theta \approx \frac{l}{d_\text{P} - r_{☾_\text{A}}}\,. \tag{8.258}$$

Zároveň vieme rozlišovaciu schopnosť vypočítať z teórie difrakcie ako

$$\theta \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,, \tag{8.259}$$

kde λ je vlnová dĺžka na ktorej JWST pozoruje, teda $\lambda = \lambda_{\text{min}}$. Spojením týchto dvoch rovníc, dosadením $r_{☾_\text{A}} = a_☾(1 + e_☾)$ a úpravou dostávame

$$l \approx 1{,}22\left(d_\text{P} - a_☾(1+e_☾)\right)\frac{\lambda_{\text{min}}}{D} = 1{,}22\cdot\left(1{,}48\cdot 10^9 - 3{,}844\cdot 10^8\cdot(1+0{,}0549)\right)\cdot\frac{600\cdot 10^{-9}}{6{,}5} = 121\,\text{m}\,. \tag{8.260}$$

Kapitola 9

Dátová analýza (riešenia)

9.1 AO 2018, Oumuamua – riešenia

(a) Počas najväčšieho priblíženia k Zemi má objekt najväčší uhlový rozmer (znázornené veľkosťou krúžkov) a veľký uhlový pohyb. Preto $T_\oplus \approx 15.10.2017$. V príslní má teleso najväčšiu rýchlosť a pôsobí tu naň najväčšie zrýchlenie. Treba preto zvoliť miesto s prudkou zmenou smeru pohybu telesa a veľkou uhlovou rýchlosťou $T_\odot \approx 7.9.2017$.

(b) Body, ktoré nás zaujímajú sú miesta kam smerujú slučky, súradnicová mriežka je delená v oboch súradniciach po 10◦, smer pohybu určíme z dátumov. Vidíme, že sa teleso pohybuje z Lýry do Pegasa, teda $\delta_A = 34°$, $\alpha_A = 280°$, $\delta_B = 25°$, $\alpha_B = 358°$.

(c) Najprv si musíme rozmyslieť, čo je na guli už znázornené: nebeský rovník, ekliptika a štyri deklinačné polkružnice (0°, 90°, 180° a 270° rektascenzie). Jeden z priesečníkov deklinačných kružníc zvolíme za severný nebeský pól N. Jarný bod je miesto, kde vystupuje ekliptika nad nebeský rovník pri pohybe po povrchu gule v smere hodinových ručičiek. Následne si na rovníku vyznačíme rektascenziu bodu A. Prípravok otočíme tak, aby prechádzal pólmi a vyznačeným bodom označujúcim α_A na rovníku a jemné delenie stupnice sa nachádzalo medzi pólom a rovníkom tak, že deklináciu bodu A môžeme priamo vyznačiť na povrch gule a tak dostať polohu bodu A. Postup opakujeme pre bod B.

Slnko sa nachádza v rovine obehu telesa, preto pri pohľade zo Slnka Oumuamua opíše na nebeskej sfére oblúk hlavnej kružnice prechádzajúci z bodu A so bodu B dlhšou stranou. Pre zvýšenie presnosti zanesenia je vhodné zaniesť aj aspoň jeden z antipodálnych bodov k bodom A, B s opačnou deklináciou a rektascenziou väčšou o 180°. Konečne nanesieme dlhší oblúk hlavnej kružnice medzi bodmi A, B a šípkou označíme smer pohybu od A do B po dlhšom oblúku.

(d) Uhlová vzdialenosť ϕ medzi bodmi A, B je dĺžka kratšieho oblúka medzi A, B. Po odmeraní máme $\phi = (67 \pm 2)°$. Tento uhol sa dal aj vypočítať pomocou kosínusovej vety pre sférický trojuholník

$$\cos\phi = \cos(90° - \delta_\mathrm{A})\cos(90° - \delta_\mathrm{B}) + \sin(90° - \delta_\mathrm{A})\sin(90° - \delta_\mathrm{B})\cos(\alpha_\mathrm{A} - \alpha_\mathrm{B})\,, \tag{9.1}$$

$$\cos\phi = \sin(\delta_\mathrm{A})\sin(\delta_\mathrm{B}) + \cos(\delta_\mathrm{A})\cos(\delta_\mathrm{B})\cos(\alpha_\mathrm{A} - \alpha_\mathrm{B})\,. \tag{9.2}$$

Sklon roviny dráhy i je uhol medzi obežnou rovinou telesa a rovinou ekliptiky, presnejšie uhol medzi normálou k rovine obehu, pri pohľade z ktorej sa teleso pohybuje proti smeru pohybu hodinových ručičiek a severnou normálou k rovine ekliptiky (smerom k severnému pólu ekliptiky). Keďže sa teleso pohybuje okolo Slnka opačným smerom ako Zem, je jeho inklinácia i väčší z uhlov zovretých trajektóriou telesa a ekliptikou. Tento uhol vieme pohodlne odmerať, ak si naznačíme na oboch kružniciach body vo vzdialenosti 90° od ich priesečníkov a určíme vzdialenosť týchto bodov. Odmeriame $i = (122 \pm 3)°$.

Dĺžka výstupného uzla Ω je uhol medzi priesečníkom trajektórie telesa a ekliptiky v ktorom prechádza teleso nad ekliptiku (výstupným uzlom) a jarným bodom meraná po ekliptike, teda ekliptikálna dĺžka výstupného uzla. Výstupný uzol je v našom prípade priesečník bližšie k jarnému bodu. Po odmeraní $\Omega = (25 \pm 4)^\circ$, kde veľká chyba je spôsobená pomerne veľkou citlivosťou tejto veličiny na nepresnosti v zakreslení ekliptiky a trajektórie telesa.

Argument perihélia ω je uhol medzi perihéliom a výstupným uzlom meraný v smere pohybu telesa. Perihélium si vyznačíme ako bod uprostred bodov A, B na trajektórii telesa. V našom prípade je ω dlhší uhol medzi bodom perihélia a výstupným uzlom, $\omega = (242 \pm 5)^\circ$, kde chyba je ovplyvňovaná faktormi ako chyba dĺžky výstupného uzla a navyše chybou zanesenia bodu perihélia.

(e) Pre určenie hodnoty excentricity e hyperbolickej trajektórie telesa využijeme rovnicu kužeľosečky v polárnych súradniciach so stredom v ohnisku (Slnku)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu}\,, \tag{9.3}$$

kde ν je uhol zovretý sprievodičom a priamkou spájajúcou Slnko a perihélium. Vidíme, že vzťah nie je definovaný pre $1+e\cos\nu_k = 0$. Tento smer určuje smer asymptôt k hyperbole. Uhol medzi nimi je ϕ a platí

$$\phi = 360^\circ - 2\nu_k\,, \tag{9.4}$$

Po dosadení a úprave máme

$$e = -\frac{1}{\cos\nu_k} = -\frac{1}{\cos(180^\circ - \frac{\phi}{2})} = \frac{1}{\cos\frac{\phi}{2}} = 1{,}20 \pm 0{,}02\,. \tag{9.5}$$

(f) Kľúčom k určeniu v_∞ je druhý obrázok a pojem paralaxy. Ak by sa teleso nepohybovalo, z dĺžky hlavnej polosy opísanej elipsy (ročnej paralaxy) π sa dá určiť vzdialenosť r telesa od Slnka v astronomických jednotkách ako

$$r = \frac{1}{\tan\pi}\,. \tag{9.6}$$

Vidíme, že na obrázku vytvára teleso eliptické slučky, ktoré vypĺňajú uhol. Paralaxy môžeme odhadnúť ako uhlové vzdialenosti po sebe nasledujúcich extrémov slučiek. Odmeraním pravítkom a prevedením mierkou obrázku na stupne dostávame:

$$\pi_1 = (6{,}9 \pm 0{,}3)^\circ, \pi_2 = (5{,}2 \pm 0{,}3)^\circ, \pi_3 = (4{,}1 \pm 0{,}2)^\circ, \pi_4 = (3{,}46 \pm 0{,}18)^\circ\,,$$

odhady paraláx s ročnými odstupmi. Po prepočítaní na vzdialenosti dostávame

$$r_1 = (16{,}7 \pm 0{,}7)\,\mathrm{AU}, r_2 = (22{,}2 \pm 1{,}1)\,\mathrm{AU}, r_3 = (28{,}1 \pm 1{,}4)\,\mathrm{AU}, r_4 = (33{,}1 \pm 1{,}8)\,\mathrm{AU}\,,$$

pričom sa jedná o akési stredné vzdialenosti od Slnka počas roka. Ak rýchlosť v nekonečne odhadneme ako rozdiel r_1 a r_3 (v týchto vzdialenostiach sa teleso pohybuje prakticky priamo od Slnka) delenú tromi rokmi, dostávame

$$v_\infty = \frac{(33{,}1 \pm 1{,}8)\,\mathrm{AU} - (16{,}7 \pm 0{,}7)\,\mathrm{AU}}{3\,\mathrm{roky}} = (26 \pm 3)\,\mathrm{km\,s^{-1}}\,. \tag{9.7}$$

(g) Veľkosť hlavnej polosy určíme zo zachovania energie (z rovnice vis-viva)

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r} = -\frac{GM_\odot}{2a}\,. \tag{9.8}$$

Ak dosadíme pre r nekonečno a pre $v = v_\infty$ dostávame

$$\frac{v_\infty^2}{2} = -\frac{GM_\odot}{2a}, \qquad a = -\frac{GM_\odot}{v_\infty^2} = -(1{,}3 \pm 0{,}3)\,\mathrm{AU}\,. \tag{9.9}$$

(h) Pre vzdialenosť q od Slnka v perihéliu máme

$$q = a(1-e) = (0{,}26 \pm 0{,}07)\,\mathrm{AU}\,. \tag{9.10}$$

Z nej môžeme pomocou zachovania energie

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_q^2}{2} - \frac{GM_\odot}{q}\,, \tag{9.11}$$

určiť rýchlosť v perihéliu v_q ako

$$v_\mathrm{q} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_\odot}{q}} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_\odot}{a(1-e)}} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_\odot}{-\frac{GM_\odot}{v_\infty^2}(1-e)}} \tag{9.12}$$

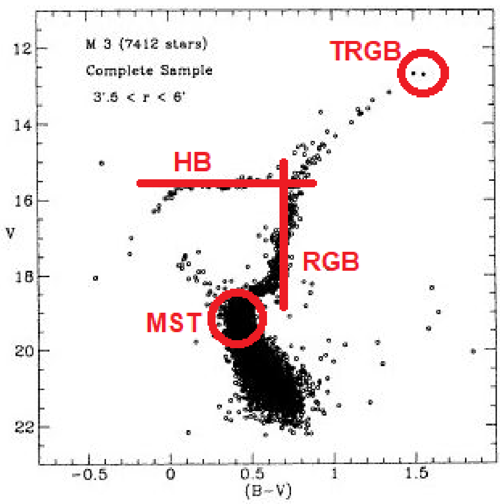
$$v_\mathrm{q} = v_\infty\sqrt{1 + \frac{2}{e-1}} = v_\infty\sqrt{\frac{e-1}{e-1} + \frac{2}{e-1}} = v_\infty\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = (86 \pm 15)\,\mathrm{km\,s^{-1}}. \tag{9.13}$$

9.2 AO 2019, CM diagram – riešenia

(a) Hodnoty v úlohe určíme porovnaním diagramov pre M3 a ostatné hviezdokopy. Tieto diagramy by mali mať (najmä ak predpokladáme rovnaký vek hviezdokôp) rovnaký tvar. Hviezdy, ktoré sa nachádzajú v rovnakej oblasti diagramu majú rovnakú absolútnu magnitúdu. To sa dá využiť na určenie modulu vzdialenosti, potrebujeme iba porovnať V magnitúdu niektorých výrazných oblastí v diagramoch s už známou hviezdokopou. Môžeme na to využiť nasledujúce časti CM diagramu

- *Tip of the red giant branch*, teda najjasnejší červený obor v hviezdokope, metóda sa používa pre galaxie, kde máme väčšiu vzorku práve takýchto jasných hviezd;
- *Horizontal branch*, vývojová vetva v ktorej dochádza k horeniu hélia v jadre hviezdy, obsahuje RR Lyr;
- *Main sequence turnoff*, oblasť, kde hviezdy opúšťajú hlavnú postupnosť, je určené vekom hviezdokopy.

Keďže pre M3 máme dané $(m_0 - M_0) = 15$, k tejto hodnote musíme už iba pričítať vertikálny posun na ostatných obrázkoch.



Obr. 9.1: Časti CM diagramu

Pre farebné excesy sledujeme hodnotu farebného indexu $B-V$ ďalšej výraznej črty diagramov - *Red giant branch*, teda vetvy obrov. V prípade hviezdokopy M3 máme podľa zadania zanedbať medzihviezdnu absorpciu. To znamená, že pre M3 platí $(B-V) = (B-V)_0$ a preto je jej farebný exces nulový, $E_{\mathrm{B-V}} = 0$. Pri určovaní farebného excesu ostatných hviezdokôp budeme predpokladať, že všetky majú rovnaký index $(B-V)_0$, potom nám stačí z CM diagramov odčítať index $(B-V)$ vetvy obrov. Inými slovami, farebný exces vypočítame ako horizontálny posun vetvy obrov jednotlivých hviezdokôp v porovnaní s M3.

Ako vidíme na obrázkoch, reálne dáta nie sú ideálne a v niektorých hviezdokopách sú vyššie spomínané oblasti CM diagramu výraznejšie ako v iných.

Pri výpočte modulu vzdialenosti urobíme priemer z troch nameraných vertikálnych posunutí. Chybu odhadneme z presnosti odčítania význačných polôh z diagramov. Dostávame

- NGC 6366: $(m - M) = 15{,}3 \pm 0{,}5\,,\ E_{\mathrm{B-V}} = 0{,}75 \pm 0{,}05\,;$
- NGC 5053: $(m - M) = 16{,}3 \pm 0{,}5\,,\ E_{\mathrm{B-V}} = 0{,}00 \pm 0{,}05\,;$

Tabuľka 9.1: Polohy významných oblastí na CM diagramoch hviezdokôp.

	h	A		
	M3	NGC 6366	NGC 5053	Palomar 3
V (RGB tip)	12,5	13,5	14,5	18
$V - V_{\mathrm{M3}}$ (RGB tip)		1,0	2,0	5,5
V (HB)	15,5	15,5	16,5	20
$V - V_{\mathrm{M3}}$ (HB)		0,0	1,0	4,5
V (MST)	18,5	18,5	19,5	23,5
$V - V_{\mathrm{M3}}$ (MST)		0,0	1,0	5,0
$B - V$	0,7	1,45	0,7	0,7

- Palomar 3: $(m - M) = 20 \pm 0{,}5\,,\ E_{\mathrm{B-V}} = 0{,}00 \pm 0{,}10\,.$

(b) Do vzorca pre modul vzdialenosti musíme zahrnúť aj medzihviezdnu absorpciu

$$(m - M) = 5\log r - 5 + A_{\mathrm{V}} = (m - M) = 5\log r - 5 + 3{,}1E_{\mathrm{B-V}}\,, \tag{9.14}$$

$$r = 10^{\frac{(m-M)+5-3{,}1E_{\mathrm{B-V}}}{5}}\,. \tag{9.15}$$

Nepresnosť určenia vzdialenosti môžeme určiť dosadením krajných hodnôt vstupných veličín. S využitím derivácií je tiež možné odvodiť nasledujúci vzorec na výpočet odchýlky

$$\sigma_r = r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial(m-M)}\right)^2 \sigma^2_{(m-M)} + \left(\frac{\partial r}{\partial E}\right)^2 \sigma^2_E} = r\,\frac{\ln 10}{5}\sqrt{\sigma^2_{(m-M)} + 9{,}6\sigma^2_E}\,. \tag{9.16}$$

Obidve metódy sú ohodnotené rovnakým počtom bodov (ak sú použité správne), súťažiaci si teda môžu vybrať, ktorá z nich im viac vyhovuje. Po dosadení dostávame nasledujúce hodnoty vzdialeností hviezdokôp od Slnka r. Pre ukážku ich porovnávame s hodnotami $\tilde{r}$ z CATALOG OF PARAMETERS FOR MILKY WAY GLOBULAR CLUSTERS:

- NGC6366: $r = (4{,}3 \pm 1{,}0)\,\mathrm{kpc}\,,\quad \tilde{r} = 4{,}3\,\mathrm{kpc}$
- NGC5053: $r = (17 \pm 4)\,\mathrm{kpc}\,,\quad \tilde{r} = 17{,}4\,\mathrm{kpc}$
- Palomar 3: $r = (87 \pm 19)\,\mathrm{kpc}\,,\quad \tilde{r} = 92{,}5\,\mathrm{kpc}$

Vidíme, že nami získané hodnoty sú v medziach chýb správne, no ich nepresnosť je pomerne veľká, čoho príčinou je magnitúda v exponente vzťahu pre výpočet vzdialenosti.

(c) Do grafu máme vynášať priemety do roviny galaxie, hodnoty vzdialeností uvedených v tabuľke musíme preto prepočítať podľa vzťahu

$$r^* = r\cos b\,, \tag{9.17}$$

pričom do grafu vynášame dvojice vzdialenosť, uhol (r^*, l). Ako pri každom zanášaní do grafu si treba uvedomiť ako sú členené osi, poprípade si to rozvrhnúť. Radiálne lúče sú delené po 2°

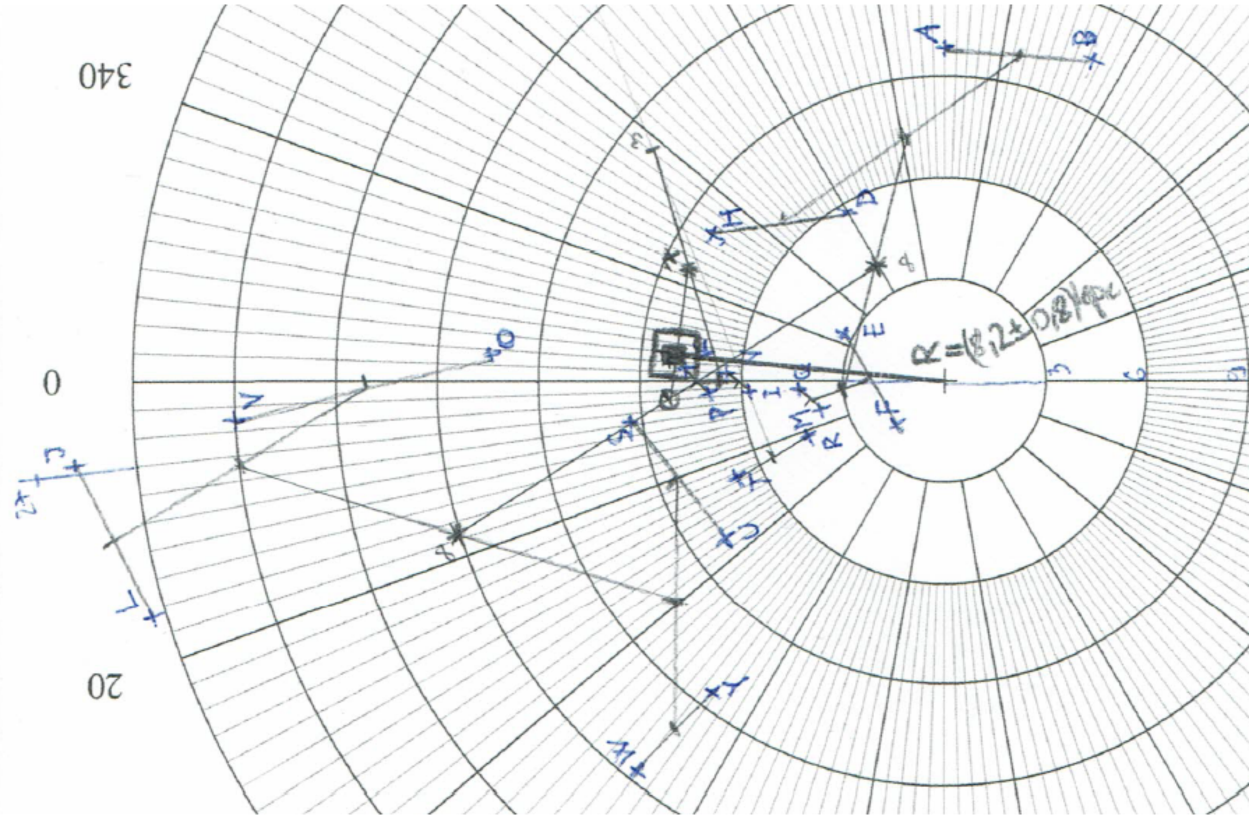
s veľkým krokom 20°, sústredných kružníc je osem, autor zvolil krok 3 kpc. Pri zanášaní sa do grafu nezmestí Palomar 3, ak by sme mierku prispôsobili tak, aby sa zmestil, stala by centrálna oblasť prihustá a neprehľadná.

(d) Pri určení stredu Galaxie predpokladáme, že guľové hviezdokopy sú rovnomerne rozložené okolo jej ťažiska. Teda ak nájdeme ťažisko priemetov hviezdokôp, určíme polohu priemetu centra Galaxie, ak navyše predpokladáme, že leží v danej rovine, dostávame priamo jeho polohu! Pri spracovaní eliminujeme Palomar 3 ako odľahlú hodnotu súboru, jedná sa totiž o halovú guľovú hviezdokopu, ktorých je v Galaxii cca. 10, z ktorých máme v súbore len jednu. Ťažisko ostatných hviezdokôp nájdeme tak, že si súbor rozložíme na dvojice, ktorým nájdeme stred, ktorý bude reprezentovať polohu ťažiska týchto hviezdokôp. Hviezdokôp však nie je mocnina 2, musíme preto hľadať ťažisko aj „nevyváženej“ dvojice, tu platí, že ťažisko delí úsečku v pomere váh jej koncov, pričom ťažisko je bližšie ťažšiemu koncu.

Chybu určenia polohy odhadneme ako súčet chyby samotného rysovania a chyby z nasledovnej úvahy. Ak by sme nejakú z hviezdokôp v súbore nemali, ťažisko by sme dostali na inom mieste, tento posun môžeme odhadnúť ako strednú vzdialenosť hviezdokopy od stredu Galaxie delenú počtom uvažovaných hviezdokôp. Nakoniec po odčítaní hodnôt z obrázka dostávame $R = (8{,}2 \pm 0{,}8)$ kpc.

(e) Výsledok, ktorý sme získali sa v medziach chýb zhoduje s referenčnou hodnotu. Je však zaťažený väčšou štatistickou chybou, plynúcou z nepresnosti konštrukcie ťažiska a malej vzorky hviezdokôp. Tieto nedostatky by sa dali odstrániť výpočtom polohy ťažiska všetkých pozorovaných hviezdokôp v Galaxii metódou najmenších štvorcov.

Avšak aj tu je otázkou vplyv systematickej, resp. hrubej chyby. Totiž, **leží stred Galaxie naozaj v ťažisku hviezdokôp?** Ak Galaxia prekonala v nedávnej minulosti zrážku s inou galaxiou, platiť to nemusí. Ďalší problém, ktorý v praxi nastáva je tzv. *observation bias*, výberová chyba. Vzdialenejšie objekty a hlavne objekty za množstvom prachu sú málo jasné a nemusia byť pozorované. Vzhľadom na asymetrickú polohu Slnka v Galaxii a množstvo plynu a prachu v galaktickom disku a centre je zjavné, že objekty na presne opačnej strane Galaxie vlastne ani nie je možné pozorovať. Podobne je mierne problematické aj samotné určovanie vzdialeností. Sú uvedené hodnoty správne? Nie sú zaťažené nejakou chybou o ktorej nevieme?



Obr. 9.2: Hľadanie ťažiska hviezdokôp

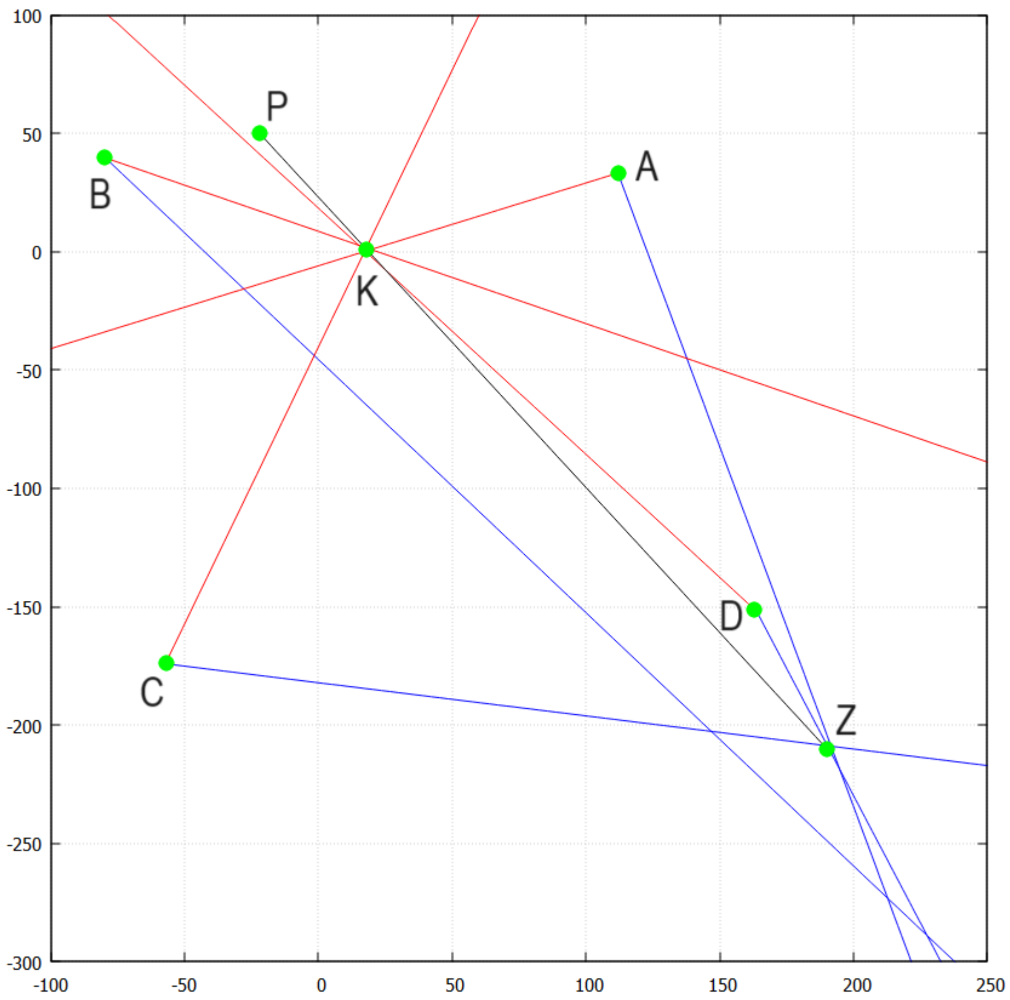
9.3 AO 2020, Bolid – riešenia

(a) Súradnice z rovníkových do horizontálnych je možné pomerne rýchlo previesť vo virtuálnom planetáriu Stellarium, ktoré umožňuje vyhľadávanie podľa polohy. Prevedené súradnice sú v tabuľke 9.2, azimut meriame od severu. V zadaní je napísané, že je možné zanedbať zakrivenie Zeme medzi pozorovateľmi, preto pri prevode súradníc stačí použiť súradnice počiatku mapy, teda $\varphi = 48{,}4°$, $\lambda = 19{,}7°$.

Tabuľka 9.2: Prepočítané polohy začiatku a konca svetelnej dráhy bolidu.

	h	A
A_z	23,3°	161,8°
A_k	12,2°	250,8°
B_z	16,4°	136,9°
B_k	11,3°	111,4°
C_z	23,7°	98,1°
C_k	6,1°	23,1°
D_z	59,4°	155,1°
D_k	5,6°	316,1°

(b) Do milimetrového papiera zakreslíme polohy pozorovateľov, od každého vedieme dve polpriamky pod azimutmi odpovedajúcimi začiatku a koncu svetelnej stopy. Príslušné štvorice polpriamok by sa mali pretnúť približne v jednom bode, týmito bodmi sú priemety začiatku a konca dráhy na zemský povrch. Ako vidíme v grafe, červené polpriamky vedúce ku koncu dráhy sa naozaj takmer pretnú v jednom bode, ktorého súradnice sú zhruba $K = (18{,}1)$km. Polohu začiatku dráhy odhadneme v mieste $Z = (190, -210)$km, kde sa takmer pretínajú tri zo štyroch modrých polpriamok. Čierna priamka spájajúca začiatočný a koncový bod je potom priemetom trajektórie telesa na zemský povrch.



(c) Výšky telesa nad povrchom môžeme určiť jednoducho ako

$$H = d \tan h\,, \tag{9.18}$$

kde d je vzdialenosť pozorovateľa od priemetu polohy telesa na zemský povrch. Túto vzdialenosť najrýchlejšie dokážeme určiť tak, že ju odčítame z mapy. Výšky pre jednotlivých pozorovateľov sa budú trochu odlišovať, ako výsledné hodnoty preto použijeme ich priemery. Vzdialenosti aj výšky pre všetkých pozorovateľov sú zhrnuté v tabuľke 9.3.

Tabuľka 9.3: Priemety vzdialenosti a výšky začiatku a konca dráhy bolidu.

	d_z [km]	d_k [km]	H_z [km]	H_k [km]
A	255	99	109,8	21,4
B	368	105	108,3	20,4
C	250	190	109,7	20,3
D	65	210	109,9	20,6
priemer			109,4	20,7

Na začiatku bol bolid vo výške približne $H_z = 110\,\mathrm{km}$ a na konci $H_k = 21\,\mathrm{km}$.

(d) Miesto dopadu sa musí nachádzať v blízkosti zakreslenej čiernej priamky, niekde v oblasti za bodom K. Najďalej môže byť v bode označenom písmenom P, ktorý je priesečníkom priamej trajektórie telesa so zemským povrchom.
Na výpočet vzdialenosti bodu P od bodu K využijeme vlastnosti podobných trojuholníkov. Na obrázku označuje d_{ZK} vzdialenosť bodov Z a K a d je vzdialenosť bodov P a K. Z rovnosti pomerov strán trojuholníkov dostaneme výraz na výpočet d

$$\frac{H_{\mathrm{K}}}{d} = \frac{H_{\mathrm{Z}}}{d_{\mathrm{ZK}}} \tag{9.19}$$

$$dH_{\mathrm{K}} + d_{\mathrm{ZK}}H_{\mathrm{K}} = dH_{\mathrm{Z}} \tag{9.20}$$

$$d = \frac{H_{\mathrm{K}}}{H_{\mathrm{Z}} - H_{\mathrm{K}}} d_{\mathrm{ZK}} \tag{9.21}$$

Vyjde nám $d = 63{,}5\,\mathrm{km}$. Na čiernej priamke odmeriame túto vzdialenosť od bodu K a vyjdú nám súradnice odhadovaného miesta dopadu: $P(-22, 51)\mathrm{km}$.
Vzhľadom na pomalú rýchlosť telesa po zbrzdení atmosférou teleso nedoletí až do bodu P, ale dopadne skôr. Od zakreslenej priamky ho môže vychýliť atmosférické prúdenie.

(e) Azimut smeru z ktorého teleso priletelo určíme odčítaním azimutu zakreslenej priamky $A = 141°$, výšku nad obzorom určíme ako

$$h = \arctan \frac{H_z - H_k}{|ZK|} = 18°\,. \tag{9.22}$$

Toto buď prevedieme do rovníkových súradníc ($\alpha \approx 0^h 10^m, \delta \approx -15°$), alebo priamo z horizontálnych súradníc s pomocou Stellaria určíme smer medzi hviezdami, ktorý sa premieta do súhvezdia Veľryby.

(f) Rýchlosť telesa pri vstupe do atmosféry zistíme z pozorovanej uhlovej rýchlosti a vzdialenosti ako $v_t = d\omega = (11{,}1 \pm 0{,}2)\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Treba si však dať pozor na prevod jednotiek (stupne treba previesť na radiány). Táto rýchlosť je navyše len tangenciálna zložka vektora rýchlosti. Pre určenie skutočnej rýchlosti musíme ešte poznať uhol zovretý vektorom rýchlosti telesa a spojnicou ZC v priestore (teda nejde o uhol z mapy!). Tento uhol najjednoduchšie spočítame ako uhlovú vzdialenosť medzi pozorovanou polohou začiatku trajektórie pozorovateľom C a polohou smeru, z ktorého teleso priletelo pomocou kosínusovej vety ako

$$\cos\chi = \sin h_z^C \sin h + \cos h_z^C \cos h \cos(A_z^C - A)\,, \quad \chi \approx (40 \pm 2)°\,.$$

Skutočnú rýchlosť potom dostaneme ako $v = v_t/\sin\chi = (17{,}3 \pm 0{,}8)\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

(g) Vzhľadom na dátum pozorovania máme ihneď $\Omega = (1 \pm 1)°$, keďže teleso priletelo spod ekliptiky. Pre určenie dráhových parametrov je nutné zistiť (alebo aspoň odhadnúť) vektor rýchlosti telesa v inerciálnej sústave, teda opraviť pozorovaný vektor rýchlosti o pohyb Zeme rýchlosťou asi $v_\oplus = 29{,}8\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Pre tento prevod je užitočné poznať ekliptikálne súradnice smeru príletu $\lambda = (357 \pm 2)°$, $\beta = -15°$. Ak zavedieme súradný systém ako x v smere do jarného bodu, y v smere pohybu Zeme do $\lambda = 90°$ a z do severného pólu ekliptiky, máme zložky vektoru rýchlosti telesa voči Zemi (’) a v inerciálnej sústave

$$
\begin{aligned}
v'_x &= -v\cos\beta\cos\lambda = (-16{,}7 \pm 0{,}8)\,\mathrm{km\,s^{-1}} & v_x &= (-16{,}7 \pm 0{,}8)\,\mathrm{km\,s^{-1}},\\
v'_y &= -v\cos\beta\sin\lambda = (0{,}8 \pm 0{,}5)\,\mathrm{km\,s^{-1}} & v_y &= (30{,}6 \pm 0{,}5)\,\mathrm{km\,s^{-1}},\\
v'_z &= -v\sin\beta \qquad\quad = (4{,}5 \pm 0{,}3)\,\mathrm{km\,s^{-1}} & v_z &= (4{,}5 \pm 0{,}3)\,\mathrm{km\,s^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Rýchlosť telesa v Slnečnej sústave teda bola $v = (35{,}1 \pm 0{,}7)\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, inklináciu dráhy určíme ako $\sin i = v_z/v = (7{,}4 \pm 1{,}0)^\circ$. Veľkosť hlavnej polosi máme z rovnice vis-viva (zákon zachovania energie)

$$
\frac{v^2}{2} - \frac{GM_\odot}{R} = -\frac{GM}{2a}\,, \qquad a = \frac{RGM_\odot}{2GM_\odot - v^2R} = \frac{1}{2-(v/v_\oplus)^2} = (1{,}6 \pm 0{,}2)\,\mathrm{AU}\,.
$$

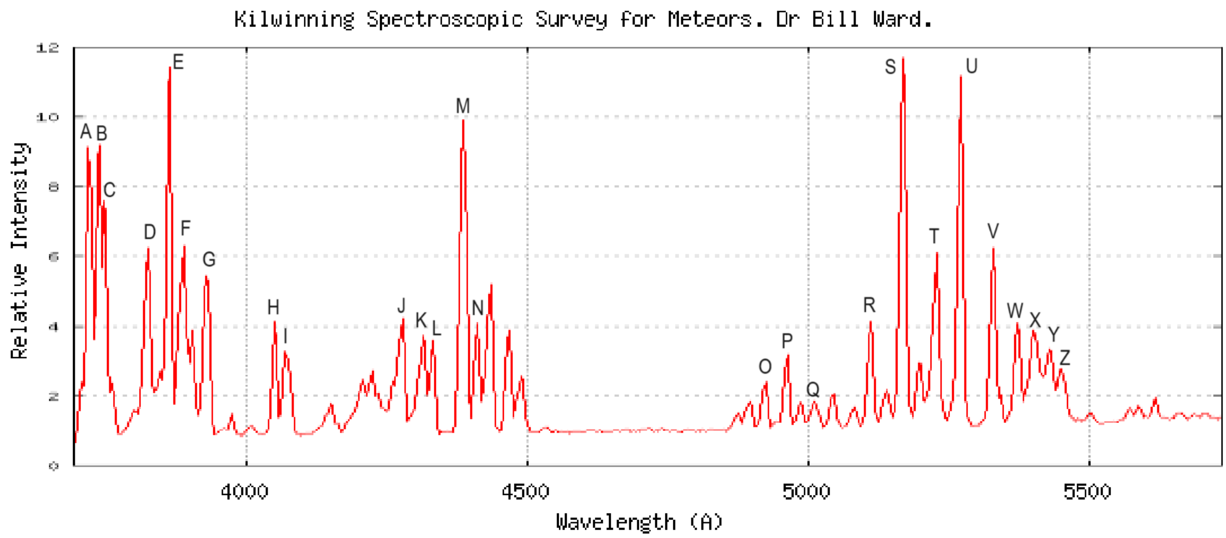
Excentricita sa dá určiť z tzv. Runge-Lenzovho vektoru ako

$$
e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{v\sin\theta}{v_\oplus}\right)^2}{a[AU]}} = \sqrt{1 - \frac{v_z^2 + v_y^2}{v_\oplus^2 a[AU]}} = 0{,}58 \pm 0{,}05\,,
$$

kde ϵ je špecifická energia telesa, h je špecifický moment hybnosti, $\mu = GM_\odot$ a θ je uhol zovretý vektorom rýchlosti a sprievodičom.

(h) Spektrálne čiary na obrázku 9.3 sú identifikované v tabuľke 9.4, vidíme, že skoro všetky čiary sú čiary železa s výnimkou maxima S, ktoré zodpovedá najintenzívnejším čiaram (tripletu) horčíka a čiare G, ktorá zodpovedá ionizovanému vápniku. Vidíme však, že tieto čiary sú výrazne slabšie voči zmieneným čiaram železa v porovnaní s hodnotami z tabuľky, takže sú v telese zastúpené málo. V spektre vidíme aj množstvo neidentifikovaných čiar, pravdepodobne sa jedná o ďalšie čiary železa, ktoré sa už do tabuľky „nezmestili“.

(i) Zo spektra jasne vyplýva, že ide o železný meteorit, čomu zodpovedá obrázok D.



Obr. 9.3: Spektrum s určenými spektrálnymi čiarami.

Tabuľka 9.4: Čiary identifikované v spektre.

Čiara	Atóm	λ [Å]	Čiara	Atóm	λ [Å]
A	Fe	3719,9	N	Fe	4404,8
B	Fe	3734,9 + 3737,1	O	Fe	4920,5
C	Fe	3745,6 + 3749,5	P	Fe	4957,6
D	Fe	3825,9	Q	Fe	5012,1
E	Fe	3859,9	R	Fe	5110,4
F	Fe	3886,3	S	Mg	5167,3 + 5172,7
G	Ca+	3933,7	T	Fe	5227,2
H	Fe	4045,8	U	Fe	5269,5
I	Fe	4063,6	V	Fe	5328,0
J	Fe	4271,8	W	Fe	5371,5
K	Fe	4307,9	X	Fe	5405,8
L	Fe	4325,8	Y	Fe	5429,7 + 5434,5
M	Fe	4383,5	Z	Fe	5446,9 + 5455,6

9.4 AO 2021, Spektrum hmloviny – riešenia

(a) Intenzity spektrálnych čiar sú v tabuľke 9.5. Pri meraní je potrebné odčítať intenzitu kontinua a intenzitu žltých čiar vydeliť 20-timi, pretože sú na obrázku 20-krát zväčšené.

Tabuľka 9.5: Intenzity spektrálnych čiar.

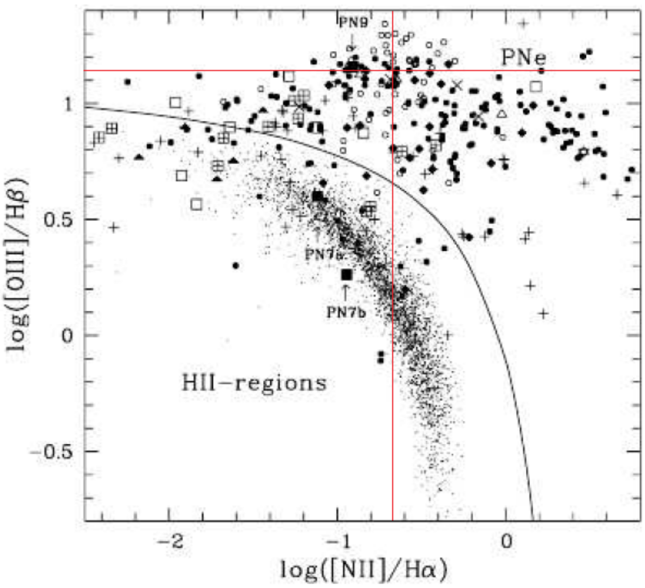
Čiara	λ	Intenzita
O III	4363 Å	21
Hβ	4861 Å	162
O III	4959 Å	727
O III	5007 Å	2242
Hα	6563 Å	1495
N II	6584 Å	323
S II	6716 Å	55
S II	6731 Å	84

(b) Dosadíme odmerané intenzity

$$\log \frac{I_{5007}}{I_{\mathrm{H}\beta}} = 1{,}14\,, \tag{9.23}$$

$$\log \frac{I_{6584}}{I_{\mathrm{H}\alpha}} = -0{,}67\,. \tag{9.24}$$

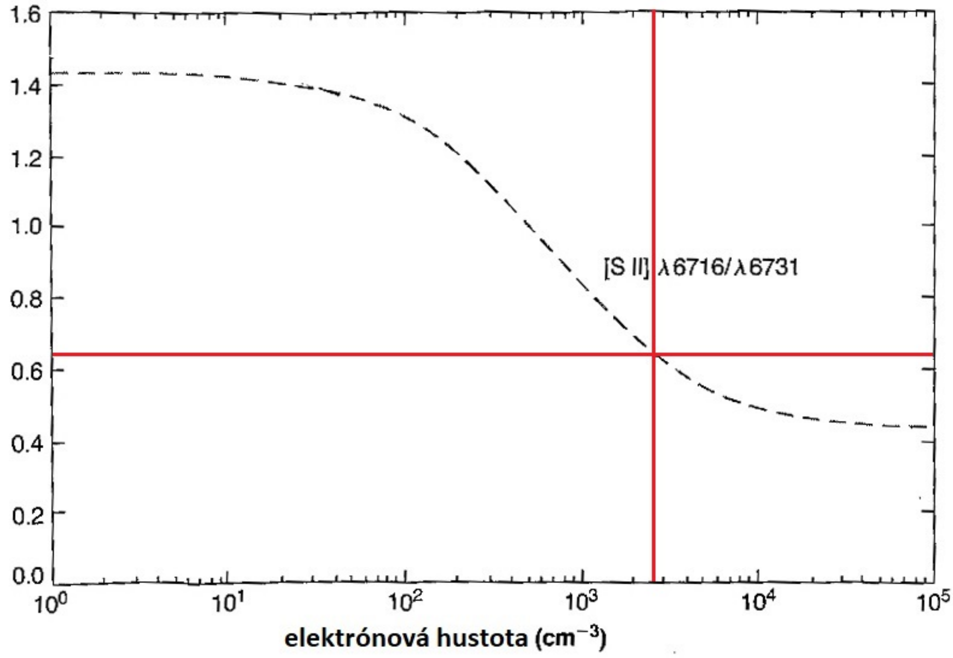
Výsledné hodnoty zakreslíme do BPT diagramu. Vidíme, že sa nám pretínajú v oblasti PNe, jedná sa teda o planetárnu hmlovinu.



(c) Opäť dosadíme namerané intenzity

$$\frac{I_{6716}}{I_{6731}} = 0{,}65\,. \tag{9.25}$$

Do diagramu elektrónovej hustoty zakreslíme úsečku zodpovedajúcu pomeru intenzít. V mieste, kde sa pretne s čiarkovanou čiarou na ňu narysujeme kolmicu. Kolmica pretne x-ovú os pri hodnote $10^{3,14}$. Elektrónová hustota je teda $n_\mathrm{e} = 1380\,\mathrm{cm}^{-3}$.



Neutrálny vodík sa skladá z jedného protónu a jedného elektrónu. Ak sa plyn skladá iba z dokonale ionizovaného vodíka, znamená to, že sa všetky protóny a elektróny od seba oddelili, ale počet protónov v celej oblasti sa stále rovná počtu elektrónov. Preto sa aj hustota protónov (v cm^{-3}) rovná hustote elektrónov. Hmotnosť elektrónov je zanedbateľná v porovnaní s hmotnosťou protónov, preto môžeme hustotu (hmotnosti) plynu odhadnúť ako

$$\rho = m_\mathrm{p} n_\mathrm{e} = 938{,}27 \cdot 1{,}783 \cdot 10^{-30} \cdot 1000 \cdot 1380 = \mathrm{g\,cm}^{-3} \tag{9.26}$$

(d) Využijeme nápovedu zo zadania a najskôr sa zamyslíme nad veľkosťou druhého člena v menovateli zlomku vpravo. Pri dostatočne vysokej hodnote teploty bude tento člen oveľa menší ako 1 a môžeme ho preto zanedbať. Ak by napr. teplota bola rádovo rovná 10^4 K, potom by jej odmocnina bola rádovo 10^2. Elektrónová hustota je v tisícoch (10^3), celý člen by mal preto hodnotu okolo 10^{-3}. Po zanedbaní tohto člena dostaneme zjednodušený vzťah

$$\frac{I_{4959} + I_{5007}}{I_{4363}} = 7{,}90 \exp\left(\frac{3{,}29 \cdot 10^4}{T}\right). \tag{9.27}$$

Do zlomku vľavo dosadíme odmerané hodnoty intenzity a dostaneme

$$\frac{I_{4959} + I_{5007}}{I_{4363}} = 140\,. \tag{9.28}$$

Teraz už len potrebujeme z rovnice vyjadriť teplotu

$$\ln \frac{140}{7{,}9} = \frac{3{,}29 \cdot 10^4}{T}\,, \tag{9.29}$$

$$T = \frac{3{,}29 \cdot 10^4}{\ln \frac{140}{7{,}9}} = 11\,400\,\mathrm{K}\,. \tag{9.30}$$

Vidíme, že teplota vyšla naozaj rádovo v desaťtisícoch K, člen v menovateli zlomku sme teda zanedbali oprávnene.

(e) Intenzita je zoslabená kvôli extinkcii v medzihviezdnom prostredí. Vo všeobecnosti je extinkcia väčšia pre kratšie vlnové dĺžky, zatiaľ čo pri veľkých λ je menej výrazná. Kvôli tomu pozorujeme farbu objektov posunutú viac do červenej oblasti spektra (väčšie λ). Tento jav sa nazýva medzihviezdne sčervenanie.

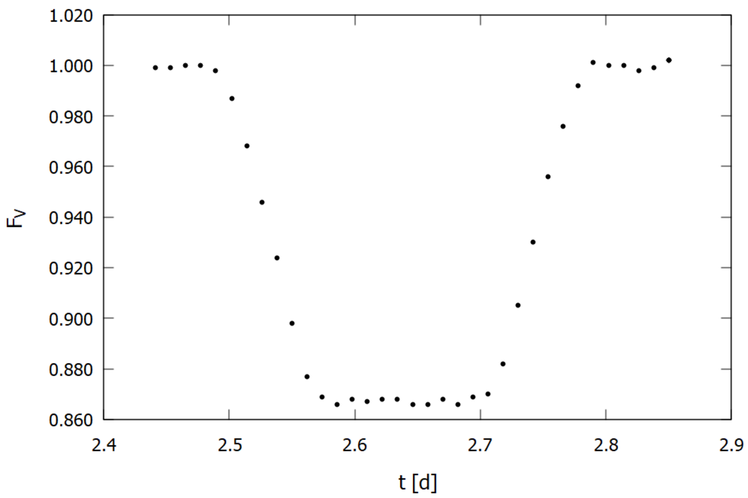
Pri analýze hmlovín používame pomery blízkych čiar, ktoré sú takmer rovnako zoslabené v medzihviezdnom prostredí. Čiary, ktoré sú od seba ďalej nie sú zoslabené v rovnakej miere, preto by sme pri ich analýze museli počítať s extinkciou.

(f) Spektrálne čiary vznikajú pri prechode elektrónu medzi energetickými hladinami atómu. Konkrétne čiary Balmerovej série vznikajú pri prechode medzi 2. a vyššími hladinami. Väčšina vodíka v hmlovine je ale ionizovaná, preto je len málo elektrónov viazaných a môže tvoriť čiary Balmerovej série. Navyše, vlnové dĺžky čiar sú dané energiami hladín, medzi ktorými prechádzajú elektróny. V oblasti spektra, ktorá je použitá v tejto úlohe sa nachádzajú iba 3 čiary z Balmerovej série a to Hα, Hβ a Hγ. Ostatné čiary zo série majú kratšie vlnové dĺžky.

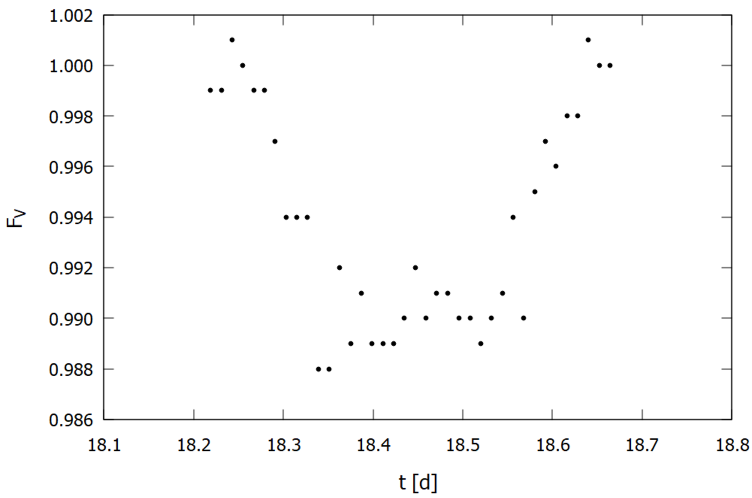
9.5 AO 2022, Stelárna astronómia – riešenia

(a) Primárne a sekundárne minimum nakreslíme do samostatných grafov s odlišnými mierkami. Časy minima sa dajú určiť pomocou preloženia papiera tak, aby sa vstupná a výstupná vetva prekrývali. Z grafov určíme nasledujúce hodnoty veličín

- $T_1 = 2{,}635\,\mathrm{d}$, $T_2 = 18{,}45\,\mathrm{d}$,
- $\Delta t_1 = 0{,}31\,\mathrm{d}$, $\Delta t_2 \doteq 0{,}40\,\mathrm{d}$,
- $\delta t_1 = 0{,}13\,\mathrm{d}$, $\delta t_2 \approx 0{,}18\,\mathrm{d}$,
- $I_1 = 0{,}867$, $I_2 = 0{,}99$.



Obr. 9.4: Primárne minimum.



Obr. 9.5: Sekundárne minimum.

(b) Celkový svetelný tok, ktorý pozorujeme vieme vyjadriť ako

$$F = F_1 S_1 + F_2 S_2 \,, \tag{9.31}$$

kde S_1, S_2 sú viditeľné plochy diskov hviezd. Tok mimo zákrytov je

$$F = F_1 \pi R_1^2 + F_2 \pi R_2^2 \,. \tag{9.32}$$

Využijeme predpoklad zo zadania $R_2 < R_1$. Pre sklon $i = 90°$ platí, že dochádza k centrálnemu zákrytu. V primárnom minime je zakrytá časť plochy primárnej zložky, dostávame od nej tok iba z plochy $\pi R_1^2 - \pi R_2^2$. Relatívny tok v primárnom minime (vydelený tokom mimo zákrytov) je

$$I_1 = \frac{F_1(R_1^2 - R_2^2) + F_2 R_2^2}{F_1 R_1^2 + F_2 R_2^2} = 1 - \frac{F_1 R_2^2}{F_1 R_1^2 + F_2 R_2^2} \,. \tag{9.33}$$

Počas sekundárneho zákrytu je celá sekundárna zložka zakrytá a dostávame tok iba od primárnej hviezdy. Relatívny tok v sekundárnom minime je preto

$$I_2 = \frac{F_1 R_1^2}{F_1 R_1^2 + F_2 R_2^2} \,. \tag{9.34}$$

To sa dá upraviť na

$$I_2 = \frac{F_1 R_1^2}{F_1 R_1^2 + F_2 R_2^2} \frac{R_2^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}(1 - I_1) \,. \tag{9.35}$$

Z tohto vieme určiť pomer polomerov ako

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{1 - I_1}{I_2}} \doteq 0{,}367 \,. \tag{9.36}$$

Pomer povrchových jasností získame napríklad úpravou výrazu pre I_2

$$\frac{1}{I_2} = \frac{F_1 R_1^2 + F_2 R_2^2}{F_1 R_1^2} = 1 + \frac{F_2 R_2^2}{F_1 R_1^2} \,, \tag{9.37}$$

$$\frac{1}{I_2} = 1 + \frac{F_2}{F_1}\frac{1 - I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_2} + \frac{F_2}{F_1}\frac{1 - I_1}{I_2} \,, \tag{9.38}$$

$$1 = I_2 + \frac{F_2}{F_1}(1 - I_1) \,, \tag{9.39}$$

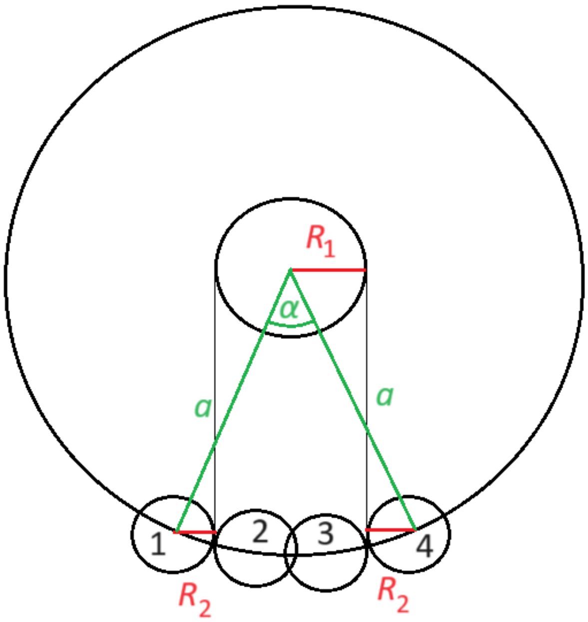
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1 - I_2}{1 - I_1} \doteq 0{,}075 \,. \tag{9.40}$$

(c) Uvažujeme relatívnu dráhu sekundárnej hviezdy okolo nehybnej primárnej hviezdy. Pri prechode od 1. ku 4. kontaktu sekundárna hviezda opíše okolo primárnej uhol α, pre ktorý platí

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_1 + R_2}{a} \,, \tag{9.41}$$

kde a je vzdialenosť hviezd. Zároveň z 2. Keplerovho zákona dostaneme vzťah medzi dobou trvania zákrytu Δt_1 a uhlom α

$$\frac{\Delta t_1}{P} = \frac{\alpha}{2\pi} \,. \tag{9.42}$$



V prípade, že je čas Δt_1 malý v porovnaní s periódou P, je malý aj uhol α a môžeme použiť aproximáciu

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{\alpha}{2}\,. \tag{9.43}$$

Dostaneme tak približný vzťah medzi trvaním zákrytu a polomermi hviezd

$$\frac{\pi \Delta t_1}{P} = \frac{R_1 + R_2}{a}\,. \tag{9.44}$$

Po dosadení nami nameraných hodnôt vyjde $\frac{\alpha}{2} = \doteq 5{,}6°$, to je ešte dostatočne malý uhol na to, aby sme mohli aproximáciu použiť. Podobným spôsobom môžeme odvodiť aj vzťah pre dobu trvania úplného zákrytu

$$\frac{\pi \delta t_1}{P} = \frac{R_1 - R_2}{a}\,. \tag{9.45}$$

Tieto 2 vzťahy vydelíme a dostaneme

$$\frac{\delta t_1}{\Delta t_1} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_2}}\,. \tag{9.46}$$

Do oboch strán dosadíme číselné údaje, vľavo dostaneme 0,42 a vpravo 0,46. Vzhľadom na presnosť, s akou sme schopní jednotlivé údaje určiť, nám vyšli dostatočne podobné hodnoty. Môžeme teda povedať, že pomer polomerov je konzistentný s dobami úplného a čiastočného zákrytu.

(d) Sčítame druhé mocniny rovníc v zadaní a vyžijeme vzťah pre sin a cos

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,, \tag{9.47}$$

$$e^2 = (1 - e^2)\tan^2[(\Delta\Phi - 0{,}5) \cdot 90°] + \left(\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_2 + \Delta t_1}\right)^2\,, \tag{9.48}$$

čo je jednoduchá lineárna rovnica pre e^2. Do členov na pravej strane dosadíme číselné hodnoty, aby sa nám s rovnicou ľahšie manipulovalo. Najskôr je potrebné si uvedomiť, že pozorované primárne a sekundárne minimum nenastali v rámci jedného obehu, pretože perióda je len 10 dní. Primárne minimum sme pozorovali počas jedného obehu a sekundárne až počas nasledujúceho obehu. Za rozdiel fáz preto musíme dosadiť

$$\Delta\Phi = \frac{T_2 - T_1 - P}{P} = \frac{18{,}45 - 2{,}635 - 10}{10} = 0{,}5815\,. \tag{9.49}$$

Ďalej dostaneme

$$\tan^2[(\Delta\Phi - 0{,}5) \cdot 90°] \doteq 0{,}016\,57\,, \tag{9.50}$$

$$\left(\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_2 + \Delta t_1}\right)^2 \doteq 0{,}016\,07\,. \tag{9.51}$$

Z rovnice teraz vyjadríme excentricitu

$$e^2 = 0{,}016\,57 - 0{,}016\,57e^2 + 0{,}016\,07\,, \tag{9.52}$$

$$1{,}016\,57e^2 = 0{,}0005\,, \tag{9.53}$$

$$e = \sqrt{\frac{0{,}0005}{1{,}016\,57}} \doteq 0{,}022\,. \tag{9.54}$$

Teraz vypočítame argument periastra. Ak by sme dosadili číselné údaje do rovníc v zadaní, vyšlo by nám $\sin\omega > 0$ a $\cos\omega > 0$, uhol ω bude preto v 1. kvadrante. Rovnice teraz vydelíme a získame tak vzťah pre $\tan\omega$

$$\tan\omega = \frac{(1 - e^2)\tan[(\Delta\Phi - 0{,}5) \cdot 90°]}{\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_2 + \Delta t_1}}\,. \tag{9.55}$$

Po dosadení číselných hodnôt vyjde $\omega = 45°$. Uhol ω by sme tiež mohli vypočítať samostatne z oboch rovníc. Vyšli by nám mierne odlišné hodnoty, ako výsledok by sme potom pre väčšiu presnosť mohli použiť ich priemer.

(e) V grafe je potrebné vyznačiť dve príslušné krivky dané hodnotami F_2/F_1, teda vypočítané $f_\mathrm{V} = 0{,}075$ a zadané $f_\mathrm{M} = 0{,}464$. Hodnota x je daná iba súčinom $T_1\lambda$ a konštantami, preto platí

$$\frac{x_\mathrm{M}}{x_\mathrm{V}} = \frac{\lambda_\mathrm{M}}{\lambda_\mathrm{V}} = \frac{4750}{550} \doteq 8{,}64\,. \tag{9.56}$$

Toto využijeme pri určení teplôt hviezd z grafu. Keďže y je pomer teplôt, hodnoty f_V a f_M našej dvojhviezdy sa líšia iba kvôli odlišným x.

V tejto úlohe je kľúčová nasledujúca myšlienka. Predstavme si, že si nakreslíme graf ľubovoľnej funkcie $g(x)$, pričom os x budeme mať v klasickej lineárnej mierke. Ak by sme chceli nakresliť funkciu $g(x + c)$, kde c je ľubovoľná konštanta, stačilo by nám iba posunúť pôvodnú funkciu $g(x)$ o c doľava.

Logaritmická mierka funguje podobným spôsobom pre násobenie. Ak by sme nakreslili graf funkcie $g(x)$ s logaritmickou osou x, potom funkciu $g(cx)$ by sme jednoducho nakreslili tak, že by sme $g(x)$ opäť posunuli o c doľava.

Toto využijeme aj v našom prípade. Vieme, že pre našu dvojhviezdu platí $f(x_\mathrm{M}) = f(8{,}64 x_\mathrm{V})$. Krivku pre filter M preto posunieme doľava o príslušnú vzdialenosť. V mieste, kde sa posunutá krivka pretne s krivkou pre filter V určíme hodnotu x a y a z nich vypočítame teploty hviezd. Postup posunu krivky je naznačený na obrázku 9.6.

Vyznačíme si niekoľko bodov na krivke M, tie posunieme doľava o rovnakú vzdialenosť a potom ich voľne spojíme rukou. Na osi x nájdeme hodnotu $x = 8{,}64$ a odmeriame jej vzdialenosť od hodnoty $x = 1$. Presne o túto vzdialenosť musíme krivku M posunúť doľava. Tento postup nám na jednoduchý odhad teplôt postačí.

Priesečník kriviek je približne v bode $x \doteq 0{,}3$ a $y \doteq 0{,}56$. Potrebujeme už len vypočítať hodnoty teplôt

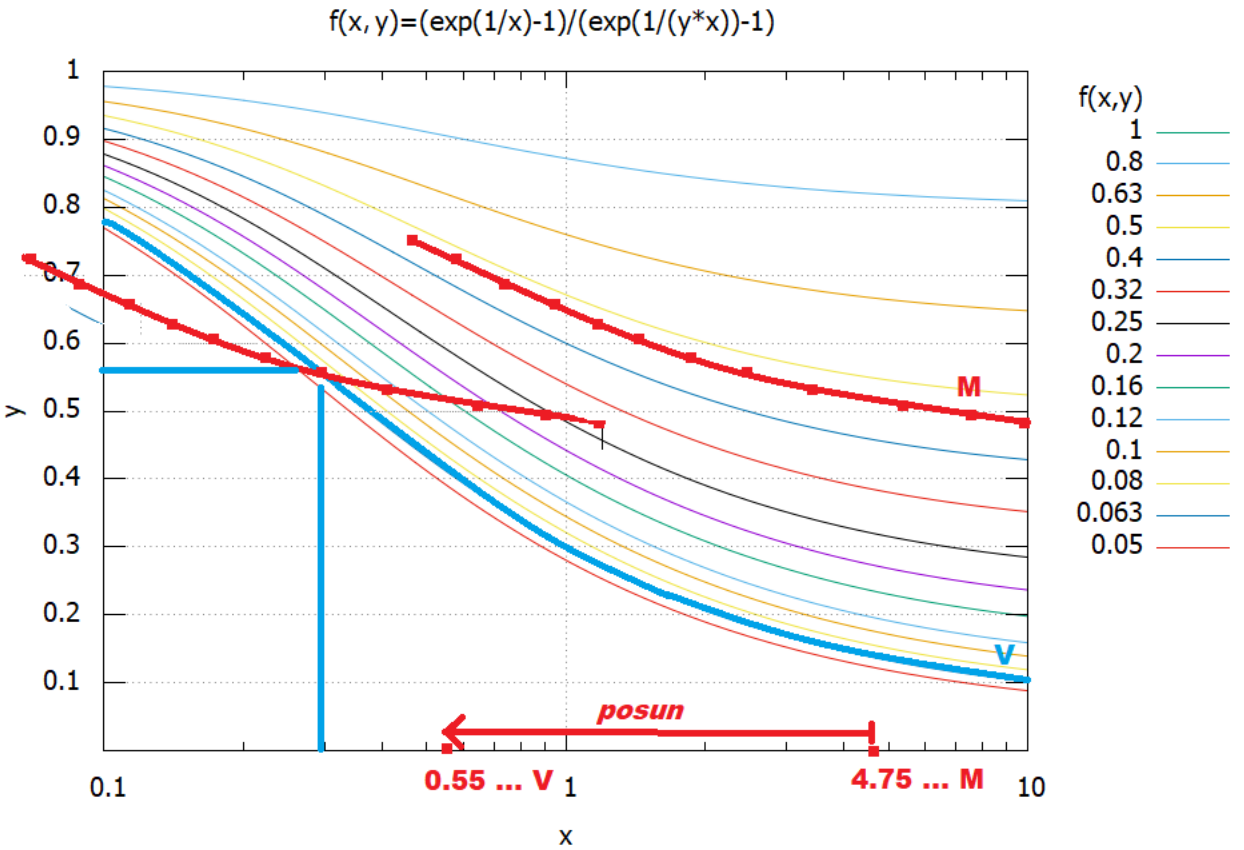
$$T_1 = \frac{xhc}{\lambda_V k} = \frac{0{,}3 \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}9979 \cdot 10^{8}}{550 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23}} \doteq 7800\,\mathrm{K}\,, \tag{9.57}$$

$$T_2 = yT_1 = 0{,}56 \cdot 7800 \doteq 4400\,\mathrm{K}\,. \tag{9.58}$$

Postupovať sa dá samozrejme aj opačným smerom, teda posunúť krivku V vpravo. Pri výpočte T_1 z x by sme museli namiesto λ_V dosadiť λ_M, inak by bol postup rovnaký.

(f) Pri postupnej zmene sklonu by sa menila šírka, hĺbka aj tvar zákrytov, až by najprv vymizol sekundárny zákryt a následne aj primárny. Pre určenie všeobecného fitu je teda dôležitý aj samotný tvar svetelnej krivky.

(g) Spektrálne pozorovanie - meranie radiálnych rýchlostí - umožní určiť z dynamiky absolútne rozmery dráhy, hviezd a ich hmotnosti. Ďalšou možnosťou je priame rozlíšenie zložiek interferometricky.



Obr. 9.6: Odčítanie z grafu

Kapitola 10

Praktické úlohy (riešenia)

10.3 Kategória SŠ, finále – riešenia

10.3.1 AO 2010, úloha 4 – riešenie

V prvom prípade sa nachádzame presne v strede časového pásma a pozeráme sa na objekt, ktorý kulminuje okolo 12:00 SEČ. Výška rovníka nad obzorom je na pozorovacom mieste približne 41°, vidíme, že objektu sa postupne zvyšuje výška kulminácia, takže aj deklinácia. Na základe toho usúdime, že sa nejedná o hviezdu ale o objekt slnečnej sústavy. Planétam by sa deklinácia v priebehu niekoľko dní nemohla deklinácia tak veľmi zmeniť. Kulminácia Mesiaca sa každý deň posunie zhruba o 50 minút, preto nám ako jediná možnosť zostáva Slnko, ktoré má kladnú a postupne sa zvyšujúcu deklináciu, lebo sme v období medzi jarnou rovnodennosťou a letným slnovratom.

V druhom prípade opäť vidíme Mesiac. Dá sa to určiť na základe každodenného posunu hodinového uhla 0 12:00 o niečo viac než 50 minút. Navyše vidíme, že sa mu deklinácia v priebehu pár dní zmení o 29°, čo môže nastať iba pre Mesiac.

V treťom prípade sa pozeráme na objekt, ktorý je o polnoci vždy pod obzorom. Z veľkých zmien rektascenzie a deklinácie môžeme usúdiť, že sa jedná o planétu. Slnko má o polnoci azimut okolo 0°, pričom v závislosti na aktuálnej hodnote časovej rovnice môže byť o niekoľko stupňov posunuté. Vidíme, že planéta sa počas celého roka od Slnka nevzdiali na viac než 61°, a kvôli časovej rovnici to bude v realite asi ešte menej. Musí sa teda jednať o vnútornú planétu. Merkúr sa nedokáže dostať do takých veľkých uhlových vzdialeností od Slnka, musí to byť preto Venuša.

V štvrtom prípade sa na základe hodnôt deklinácie dá zistiť, že sa opäť pozeráme na planétu. Podľa hodnôt rektascenzie vieme, že sa nachádza v okolí jarného bodu. Taktiež vidíme, že pri pohybe na oblohe robí slučku a za rok sa jej rektascenzia zmenila o necelé 2 hodiny. Musí to byť preto vonkajšia planéta, pravdepodobne Jupiter. Ak si pamätáme je vzdialenosť od Slnka, 5,2 au, vieme vypočítať jeho obežnú dobu, 11,8 rokov. Z toho vieme odhadnúť, že za rok by sa jeho rektascenzia mala zmeniť zhruba o 2 hodiny, čo sedí s údajmi tabuľke.

10.3.2 AO 2015, Identifikácia telies na oblohe – riešenie

Vidíme, že za 10 dní sa deklinácia prvého telesa zmení o 17° a každý deň nameriame v tom istom čase hodinový uhol posunutý o približne 50 minút. Z toho je jasné, že prvým objektom musí byť Mesiac.

Druhé teleso musí byť vonkajšia planéta, pretože sa mení jeho rektascenzia aj deklinácia, ale spôsob ich zmeny nezodpovedá ani Slnku ani Mesiacu. Podľa magnitúdy vidíme, že sa jedná o jasnú planétu, podľa magnitúdy by to mal byť Jupiter. Za predpokladu, že si pamätáme, alebo dokážeme aspoň približne odhadnúť rozmery a vzdialenosti planét, môžeme planétu identifikovať tiež vďaka jej uhlovému priemeru.

Za jeden deň sa čas kulminácie telesa posunie aj o viac ako 4 minúty, musí to byť preto planéta. Kulminácia planéty nastáva maximálne 3 hodiny pred Slnkom, čo zodpovedá uhlovej vzdialenosti 45°. Mohla by to byť Venuša, ktorá sa od Slnka nevzdiali na viac ako 46°. Túto hypotézu by podporoval aj fakt, že v dňoch blízko konjunkcie so Slnkom (okolo 22.8. kedy kulminuje okolo dvanástej) sa čas jej kulminácie aj východu/západu mení najrýchlejšie, pretože vtedy má voči Zemi najväčšiu tangenciálnu rýchlosť.

Vidíme, že štvrtý objekt sa za 24 hodín nevrátil na presne ten istý azimut, ale je o necelý stupeň posunutý. Tým pádom je aj jeho hodinový uhol zmenený zhruba o 4 minúty. To zodpovedá pohybu hviezdy. Podľa hodnôt výšky vidíme, že hviezda je na Slovensku cirkumpolárna, ale v dolnej kulminácii je blízko horizontu. Vzdialenosť hviezdy od pólu je približne 44°, určili sme ju z minimálnej výšky nad obzorom. Podľa azimutu vieme, že o polnoci sa hviezda nachádza na severozápade, na severe sa bude o polnoci nachádzať niekedy v júni. Jedná sa preto o hviezdu zimnej oblohy. V takejto úlohe budú zadané iba jasné a známe hviezdy, preto hľadáme nejakú známu hviezdu, ktorá spĺňa tieto podmienky. Takouto hviezdou je Capella.

10.3.3 AO 2017, úloha 5 – riešenie

Okamžite vidíme, že všetky 4 planéty počas svojho pohybu na oblohe robia slučku. Na základe toho je jasné, že sa jedná o 4 vonkajšie planéty. Konkrétne názvy planét sa dajú určiť na základe to, aký uhol prejdú na oblohe za rok (aj aká veľká je ich slučka) alebo ak vieme, v ktorom súhvezdí sa planéta nachádzala v určité obdobie.

Ak si pamätáme, že veľká polos dráhy Marsu je zhruba 1,5 au, vieme vypočítať jeho obežnú dobu, ktorá je približne 1,9 rokov. Za jeden rok by sa mal Mars odhadom posunúť v rektascenzii o niečo viac než 12 hodín. Žiadna z planét na obrázkoch sa neposunie o tak veľký uhol, preto sa musí jednať o Jupiter, Saturn, Urán a Neptún. Planéta 2 sa posunie za rok o najväčší uhol, preto to musí byť Jupiter, druhý najväčší uhol prejde planéta 4, teda Saturn. Urán je planétou 3 a Neptún planétou 1.

10.3.4 AO 2021, Praktická úloha – riešenie

V roku 2021 sa celoštátne kolo AO konalo online, preto sa predpokladalo, že pri riešení slepej mapy súťažiaci využijú ľubovoľné zdroje. Z toho dôvodu je aj zadanie slepej mapy náročnejšie, ako by bolo na prezenčnej súťaži.

(a) Na mape na obr. 10.1 sú nakreslené spojnice hviezd a vyšrafované približné oblasti, ktoré súhvezdia pokrývajú.

(b) Na mape sú krížikmi označené nasledujúce objekty:

- oblasť ionizovaného vodíka HII - Lagúna (M8),
- tmavá hmlovina - Uhoľné vrece,
- otvorená hviezdokopa - Šperkovnica,
- guľová hviezdokopa - ω Cen,
- galaxia - Južný veterník.

(c) Všetky hviezdy sú zakrúžkované na mape.

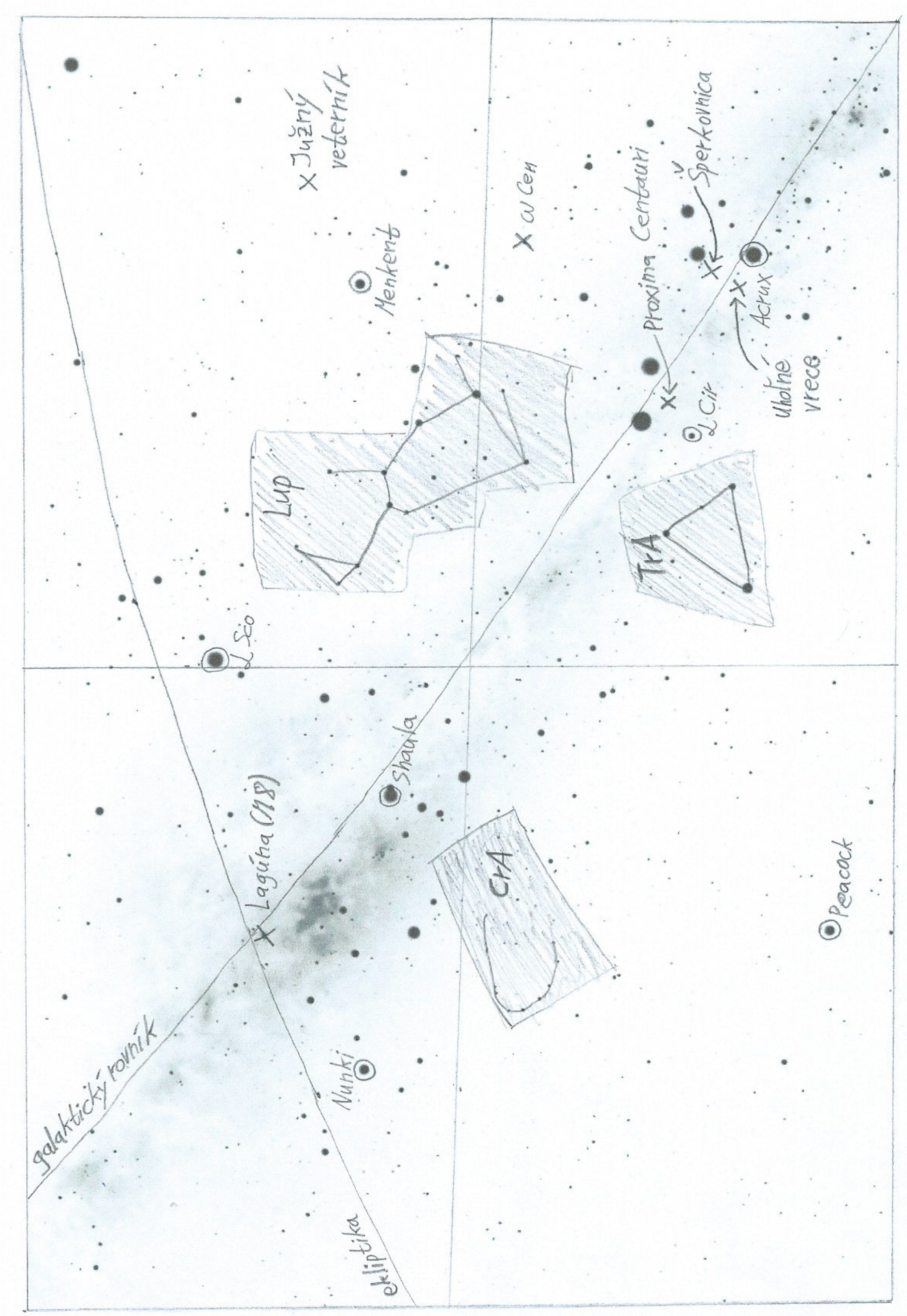
(d) Pri kreslení ekliptiky je dobré si pamätať, okolo ktorých jasných hviezd prechádza: Ponad Spicu (Panna), tesne pod Zubenelgenubi (Váhy), zo súhvezdia Škorpión „odstrihne“ hviezdu Acrab a prejde ponad Antares, v súhvezdí Strelec prejde nad hviezdou Kaus Borealis. Galaktický rovník môžeme nakresliť zhruba v strede tmavého pásu na mape, prípadne sa tiež môžeme orientovať podľa jasných hviezd, okolo ktorých prechádza. Z nich sú najpodstatnejšie Acrux (Južný kríž), Toliman (Centaurus) a Shaula (Škorpión).

(e) Najbližšia hviezda ku Slnku sa nazýva Proxima Centauri a nachádza sa v blízkosti hviezdy Toliman (α Centauri). Na mape je označená krížikom.

(f) Stred mapy sa nachádza zhruba pod hviezdou Antares, blízko hranice súhvezdí Škorpión a Oltár. V zadaní nie je uvedené, v akej projekcii je mapa nakreslená, nevieme preto určiť súradnice tohto bodu. Stred mapy nájdeme napr. v Stellariu, kde zistíme, že o polnoci kulminuje v júni a na Slovenku nad obzor nevyjde.

10.3.5 AO 2023, úloha 4 – Praktická úloha – riešenie

S pomocou súradnicovej mriežky sa dá odhadnúť, že výška Polárky nad horizontom je približne 25°, zemepisná šírka je teda tiež 25° N. Mesiac na mape je v prvej štvrti a nachádza sa prakticky v zimnom slnovratnom bode. Uhlová vzdialenosť medzi Mesiacom a Slnkom je v prvej štvrti 90°, Slnko je preto približne v jesennom bode, mapka bola zrejme urobená blízko jesennej rovnodennosti, ktorá nastáva okolo 22. septembra. Na mape je vidno, že sa jesenný bod nachádza nad horizontom, takže je nad horizontom aj Slnko.



Obr. 10.1: Riešenie slepej mapy z finále AO v roku 2021.

Záver

Tak a to je všetko.
Sme radi, že ste sa dočítali až sem,
a dúfame, že pre vás bola, respektíve bude, táto zbierka užitočná.

Do budúcnosti plánujeme revidovať chyby a dopĺňať nedokončené riešenia. Preto ak nájdete chyby, alebo budete mať ťažkosti s chápaním riešení, určite nám napíšte na `zbierka@aosk.sk`.

Samozrejme, Astronomická olympiáda pokračuje ďalej, a my stále vytvárame nové príklady. Tie sme sa ale rozhodli, že už do zbierky dopĺňať nebudeme. Namiesto toho každý rok vydáme ročenku so vzorovými riešeniami za uplynulý rok.

Nuž, ako vidíte, práce je veľa. Preto ak vás baví astronómia a chceli by ste nám pomôcť, tak nám neváhajte napísať na `ao@aosk.sk`. Budeme radi :)

S pozdravom,
tím AO.

A na záver pes!